波動方程式

みそ

2005.3.14

1　１次元波動方程式

１次元波動方程式の基本形は

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} \tag{1}$$

である。c は波の速度である。この方程式を数値的に解くためには、次のようにテイラー展開した近似式を用いる。

$$y(t \pm \Delta t, x) = y(t,x) \pm \frac{\partial y}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\Delta t)^2 \tag{2}$$

$$y(t, x \pm \Delta x) = y(t,x) \pm \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\Delta x)^2 \tag{3}$$

(2) 式より

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{y(t+\Delta t, x) + y(t-\Delta t, x) - 2y(t,x)}{(\Delta t)^2} \tag{4}$$

(3) 式より

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y(t, x+\Delta x) + y(t, x-\Delta x) - 2y(t,x)}{(\Delta x)^2} \tag{5}$$

式 (4)(5) を式 (1) に代入し整理し、さらに

$$t = \tau \Delta t, \qquad x = i \Delta x$$

とし $y(t,x) = y(\tau, i)$ と表記すると

$$y(\tau+1,i) = 2y(\tau,i) - y(\tau-1,i) + c^2(\frac{\Delta t}{\Delta x})^2(y(\tau,i+1) + y(\tau,i-1) - 2y(\tau,i)) \tag{6}$$

ここで1つ問題がある。τ は0から1,2へと増加するとしよう。$y(0,i)$ は初期条件として最初に各値を設定すればよい。しかし $y(1,i)$ はどうだろうか。式(6)から求めようとしても $y(-1,i)$ の情報が必要になり、初期条件より前の波の状態が必要となってしまう。ここで初期条件としてもう1つの条件を利用する。波の初期状態は動かないとするのである。つまり

$$\frac{\partial y(0,x)}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{y(\Delta t,x) - y(-\Delta t,x)}{2\Delta t} = 0 \tag{8}$$

よって

$$y(1,i) = y(-1,i) \tag{9}$$

ということになる。式(9)(6)より

$$y(1,i) = y(0,i) + \frac{c^2}{2}(\frac{\Delta t}{\Delta x})^2(y(0,i+1) + y(0,i-1) - 2y(0,i)) \tag{10}$$

よって $y(0,i)$ と $y(1,i)$ から式(6)より $y(2,i)$ が求まり、以降式(6)を用いて $\tau \geq 3$ の $y(\tau,i)$ を求めるのである。

2　2次元波動方程式

2次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2}) \tag{11}$$

についても1次元波動方程式で行った方法のように数値的に解いてみる。

$$t = \tau\Delta t, \qquad x = i\Delta x, \qquad y = j\Delta y$$

として $z(t,x,y)$ を $z(\tau,i,j)$ と表すと1次元波動方程式の場合と同様に

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{z(\tau+1,i,j) + z(\tau-1,i,j) - 2z(\tau,i,j)}{(\Delta t)^2} \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{z(\tau,i+1,j) + z(\tau,i-1,j) - 2z(\tau,i,j)}{(\Delta x)^2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{z(\tau,i,j+1) + z(\tau,i,j-1) - 2z(\tau,i,j)}{(\Delta y)^2} \tag{14}$$

これらの式を式 (11) に代入して整理する。ここでは Δx と Δy を Δd に等しいとして

$$z(\tau+1,i,j) = 2z(\tau,i,j) - z(\tau-1,i,j) + c^2(\frac{\Delta t}{\Delta d})^2$$
$$\times(z(\tau,i+1,j) + z(\tau,i-1,j) + z(\tau,i,j+1) + z(\tau,i,j-1) - 4z(\tau,i,j))$$

1 次元波動方程式の場合と同様に $z(0,i,j)$ を初期条件としてわかっている場合、$z(1,i,j)$ を求める場合 $z(-1,i,j)$ の情報が必要という困難を回避するために、初期条件として初めは波は動いていないという条件

$$\frac{\partial z(0,x,y)}{\partial t} = 0$$

より

$$\frac{z(\Delta t,x,y) - z(-\Delta t,x,y)}{2\Delta t} = 0$$

よってこれから

$$z(1,i,j) = z(-1,i,j)$$

これを用いれば

$$z(1,i,j) = z(0,i,j) + \frac{c^2}{2}(\frac{\Delta t}{\Delta d})^2$$
$$\times(z(0,i+1,j) + z(0,i-1,j) + z(0,i,j+1) + z(0,i,j-1) - 4z(0,i,j))$$

となる。