２変数のニュートン法

みそ

平成 20 年 8 月 25 日

1　２変数のニュートン法

変数が２つある、与えられた方程式を解く方法の一つにニュートン法がある。１変数の方程式を解く場合に用いるニュートン法と考え方は同じであるが、変数が増えた事により、解き方がやや複雑になる。

２変数 x, y を含む方程式を解くには、２つの方程式が必要だが、次の２つの方程式が与えられたとする。

$$f_1(x,y) = 0 \tag{1.1}$$
$$f_2(x,y) = 0 \tag{1.2}$$

これらの方程式を満たす x, y を見つけたいのだが、まだわからないので、とりあえず適当に初期値 x_0, y_0 を決めておく。実際に数値計算させるときに、この初期値 x_0, y_0 を、あらかじめ決めておくのだが、方程式の形によっては、最終的に解が求まらない場合もあるので、x_0, y_0 は、どのような値でも良いわけではない。

ここで、x_0, y_0 を、それぞれ $\Delta x, \Delta y$ ずらした x_1, y_1 を考える。この x_1, y_1 は

$$x_1 = x_0 + \Delta x \tag{1.3}$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y \tag{1.4}$$

と書ける。さらに、微小変化を表す式

$$f_1(x_1,y_1) - f_1(x_0,y_0) = \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y \tag{1.5}$$
$$f_2(x_1,y_1) - f_2(x_0,y_0) = \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y \tag{1.6}$$

を考える。ここで $f_1(x_1,y_1)$ と $f_2(x_1,y_1)$ が 0 になるように x_1,y_1 を選べば、x_1,y_1 は解に近づく。ただし、$f_1(x,y),f_2(x,y)$ の形によっては、逆に解から遠ざかる場合もある。よって、初期値 x_0,y_0 の選び方には注意が必要であり、初期値 x_0,y_0 を上手く決めないと、解が求まらない場合もあるので注意が必要である。以上を踏まえて

$$-f_1(x_0,y_0)=\frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}(x_1-x_0)+\frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}(y_1-y_0) \tag{1.7}$$

$$-f_2(x_0,y_0)=\frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}(x_1-x_0)+\frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}(y_1-y_0) \tag{1.8}$$

から x_1,y_1 について解く。$\boldsymbol{r}_i=(x_i,y_i)$ と定義すると、

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}_0) \tag{1.9}$$

となる。ただし

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}_i)=-\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_i) \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_i) &= \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{r}_i)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{r}_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{r}_i)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{r}_i)}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad (1.11) \\ \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{r}_i) &= \frac{1}{J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21}}\begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix} \qquad (1.12)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_i)=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{r}_i) \\ f_2(\boldsymbol{r}_i) \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

である。

$\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_0$ が十分近い値となっていれば、$\boldsymbol{r}_1$ を解とするが、実際にはなかなか一発でそうならないので、同様の計算を繰り返す。つまり

$$\boldsymbol{r}_{i+1}=\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}_i) \tag{1.14}$$

の式を用い、$i=0$ からスタートし、$\boldsymbol{r}_{i+1}$ と $\boldsymbol{r}_i$ が十分近い値となるまで繰り返し計算を行なう。

十分近い値と判定するには、$\boldsymbol{C}$ の大きさを使う。この大きさが、あらかじめ決めた微小な値より、小さくなったら計算終了とすればよい。この微小な値を小さくするほど精度が増すが、あまりにも小さくすると、解が求まるのに時間がかかる、または解が求まらない場合もあるので注意が必要である。