

三体問題

みそ

2005.2.5

1 3体問題とは？

3体問題とは文字通り、3つの物体があるとき、万有引力を用いてそれぞれの物体の振る舞いを求める問題である。しかし、意外かもしれないが、この問題は解けないのである。2つの物体があるまでなら、高校物理なので万有引力を用いて解いたことがあるだろう。その解は大きく分けて、楕円運動、双曲線運動、放物線運動の3つのタイプの解であった。なら、普通に考えるともう1個物体が増えてもどうってことないと思えるが、しかし、3つの物体があると解けないことが数学的に証明されている。よって、コンピュータによって近似的に予測することしかできないのである。私たちの世界は、3つどころか無数の物体が互いに相互作用しながら存在している。このような世界で何が起こることをどうやってわかるうか。

2 特別な3体問題

2体問題では、よく太陽と地球のモデルを考え、太陽を固定して考える。それは、太陽の質量が地球と比べて非常に大きいから、太陽は地球と比べて少ししか動かないので太陽を固定しても問題ないのである。これと同じようなことを3体問題でも行うとしよう。例えば太陽と木星のみのモデルを考える。その近辺を彗星が通ると考えると、彗星の質量は、太陽や木星と比べたら非常に小さいから、彗星は太陽や木星の運動に影響しないと考えてもよい。よって、質量の大きな2体を固定して考えて、もうひとつの物体の動きを見るには回転座標系で考える。

まず、回転していない座標系 XYZ と角速度 ω で回転する回転座標系

xyz を用意する。また、回転軸を z 軸として、Z 軸も z 軸と合わせて、座標変換の関係から、

$$\begin{aligned} X &= x \cos \omega t - y \sin \omega t \\ Y &= x \sin \omega t + y \cos \omega t \end{aligned} \quad (1)$$

という関係式が成り立つ。これらの式を t で 2 回微分すると、

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \cos \omega t - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \sin \omega t \\ \ddot{Y} &= (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \sin \omega t + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \cos \omega t \end{aligned} \quad (2)$$

となる。また、力についても考え、座標系 XYZ での力の成分を (F_x, F_y, F_z) 、回転座標系 xyz では (f_x, f_y, f_z) とおくと、式 (1) と同様な関係が成り立つから、

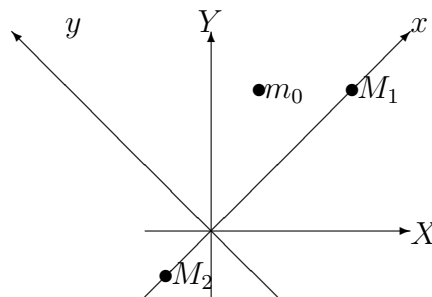
$$\begin{aligned} F_x &= f_x \cos \omega t - f_y \sin \omega t \\ F_y &= f_x \sin \omega t + f_y \cos \omega t \end{aligned} \quad (3)$$

となる。さらに、質量を m とすると、 $m\ddot{X} = F_x$ 等の運動方程式が成り立つことから、式 (2)、(3) より、

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - 2m\omega\dot{y} - m\omega^2 x &= f_x \\ m\ddot{y} + 2m\omega\dot{x} - m\omega^2 y &= f_y \end{aligned} \quad (4)$$

が得られることがわかる。これが、回転座標系の運動方程式である。

では、具体的に今回の 3 体問題のモデルを考えていこう。例として、太陽と木星があり、彗星の動きを見る問題として考える。3 体とも同じ平面にあるとする。太陽の質量を M_1 、木星の質量を M_2 、彗星の質量を m_0 とする。彗星と太陽の距離を r_{01} 、木星との距離を r_{02} 、太陽と木星との距



離を r_{12} としておく。太陽の回転座標系での座標は、

$$\left(\frac{r_{12}M_2}{M_1 + M_2}, 0, 0\right)$$

であり、木星の座標は、

$$\left(-\frac{r_{12}M_1}{M_1 + M_2}, 0, 0\right)$$

であるから、

$$r_{01} = \sqrt{\left(x - \frac{r_{12}M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_{02} = \sqrt{\left(x + \frac{r_{12}M_1}{M_1 + M_2}\right)^2 + y^2 + z^2}$$

となる。太陽と木星による彗星のポテンシャルは、

$$U = -\frac{Gm_0M_1}{r_{01}} - \frac{Gm_0M_2}{r_{02}}$$

だから、これから彗星に働く力の回転座標系での成分が次のように求められる。

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Gm_0M_1\left(x - \frac{r_{12}M_2}{M_1+M_2}\right)}{r_{01}^2} - \frac{Gm_0M_2\left(x + \frac{r_{12}M_1}{M_1+M_2}\right)}{r_{02}^2} \\ f_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{Gm_0M_1y}{r_{01}^2} - \frac{Gm_0M_2y}{r_{02}^2} \\ f_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{Gm_0M_1z}{r_{01}^2} - \frac{Gm_0M_2z}{r_{02}^2} \end{aligned} \quad (5)$$

これらの式と式(4)をあわせれば回転座標系での彗星の軌道が計算できる。

ここまでくれば、ルンゲクッタの公式を使った微分方程式の数値計算ができるのだが、しかし、万有引力定数は mks 単位系において、約 6.67×10^{-11} であり、また太陽や木星などの質量や、その間の距離も非常に大きい。一般的にコンピュータでは、避けられない誤差の発生を考えると、あまり値が大きくなり小さない数値を計算させるほうが好ましい。よって、単位を考えず、質量や長さを無次元の量にして数値計算させるのが良い。このように現象を一般化すれば、結果がわかりやすいことが多い。もちろん結果を無次元を行った操作の逆を行えば実際のスケールでの結果とな

る。これらのことは、例えば工学で、飛行機や自動車の空力実験でも行っている。自動車はまだできるとしても、飛行機を実際の大きさ作って実験してたらばからしい。それぞれの量を無次元にして相似を使って考えて、模型を作って実験する。このほうが、はるかに効率が良い。

ここから、今回の3体問題の無次元化を考える。まず太陽と木星の間に成り立つケプラーの第3法則を見ると、

$$\frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2} = \frac{r_{12}^3}{T^2} \quad (6)$$

である。周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ だから、この式を書き直して、

$$G(M_1 + M_2) = \omega^2 r_{12}^3 \quad (7)$$

となる。ここで、Gが1になるように各量を無次元化してみる。それには新しい変数、 x', y', z', m_1, m_2 を用意して、 $M_1 + M_2$ と r_{12} と ω の部分がそれぞれ1になるように考えて無次元化する。よって次の関係を満たすようにすればよい。

$$x = r_{12}x', y = r_{12}y', z = r_{12}z', \quad m_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}, m_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \quad (8)$$

これで、質量と距離としての新しい変数は無次元化されたが、まだ時間 t が残っている。角速度 ω に注目して、

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{r_{12}^3}} \quad (9)$$

単位は(ラジアン/毎秒)であり、ラジアンは無次元な物理量だから、時間としての無次元化された新しい変数を s とすると、

$$s = \frac{t}{\sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{r_{12}^3}}} \quad (10)$$

とすればよいことがわかる。よって、式(7)~(10)を式(4) (5)に入れて整理すれば、

$$\begin{aligned} \ddot{x}' - 2\dot{y}' - x' &= f_x \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' - y' &= f_y \\ \ddot{z}' &= f_z \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
f_{x'} &= -\frac{m_1(x' - m_2)}{r_{01}^3} - \frac{m_2(x' + m_1)}{r_{02}^2} \\
f_{y'} &= -\frac{m_1 y'}{r_{01}^3} - \frac{m_2 y'}{r_{02}^3} \\
f_{z'} &= -\frac{m_1 z'}{r_{01}^3} - \frac{m_2 z'}{r_{02}^3} \\
r_{01} &= \sqrt{(x' - m_2)^2 + y'^2 + z'^2} \\
r_{02} &= \sqrt{(x' + m_1)^2 + y'^2 + z'^2}
\end{aligned} \tag{12}$$

となる。ずいぶんと数値計算させやすくなった。

3 周期解の存在

実際に式 (11)、(12) をルンゲクッタ法で数値計算してみると多体問題に特有な複雑な軌道は見られず、条件によってはある周期にしたがって一定の軌道を描いているようにも見える。周期解が存在するのか理論的に確かめてみることにする。まずわかりやすいように、式 (11)、(12) の x', y', z' を x, y, z と表記することにする。また力 f の各成分は中心力のポテンシャルより求められるから、ポテンシャル U を、

$$U = -\frac{m_1}{r_{01}} - \frac{m_2}{r_{02}} \tag{13}$$

とすればよいことは明らかで、運動方程式を書き直すと、

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\
\ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\
\ddot{z} &= -\frac{\partial U}{\partial z}
\end{aligned} \tag{14}$$

式 (14) の上の式に \dot{x} 、真ん中の式に \dot{y} 、下の式に \dot{z} をかけそれぞれの式をたすと、

$$\begin{aligned}
\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} - (x\dot{x} + y\dot{y}) &= -\left(\dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial U}{\partial z}\right) \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - (x^2 + y^2)) &= -\frac{dU}{dt} \\
\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U &= -C
\end{aligned} \tag{15}$$

が導ける。最後に t について積分を行い C は定数で後の便宜上 $-$ をつけた。ここで、

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \geq 0$$

だから、

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m_1}{r_{01}} + \frac{m_2}{r_{02}} \geq C \quad (16)$$

が得られる。この式から初期値を決めたら C の値が決まる。もし左辺の関数が発散せず閉じていれば、ある曲線の中でしか運動できない。そこで、その曲線を

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m_1}{r_{01}} + \frac{m_2}{r_{02}} = C$$

とにおいてこの解を調べれば周期解の特性がわかるはずである。