修正オイラー法

みそ

2004.11.12

1　方法

オイラー法ではテイラー展開を１次までしかとらなかったが、２次までとるのが修正オイラー法である。オイラー法と同様に考えて、テイラー展開を２次まで考えると、

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + f(x_i, y_i)h + f'(x_i, y_i)\frac{h^2}{2} \tag{1}$$

という式が得られる。しかし、この式には関数 f を微分したものが含まれいるため計算が面倒である。そこで、

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \{Af(x_i, y_i) + Bf(x_i + ah, y_i + bhf(x_i, y_i))\}h \tag{2}$$

と関数 f を微分したものを含まない形で表せるとしよう。ここで、

$$Bf(x_i+ah, y_i+bhf(x_i, y_i)) = f(x_i, y_i)+f_x(x_i, y_i)ah+f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)bh \tag{3}$$

と１次までテイラー展開して、式（３）を式（２）へ代入して、

$$y(x_{i+1}) = y(x_i)+(A+B)f(x_i, y_i)h+B\{af_x(x_i, y_i)+bf(x_i, y_i)f_y(x_i, y_i)\}h^2 \tag{4}$$

という式が得られる。ここで、　$f' = \frac{df}{dx} = f_x + ff_y$　であることに注目すると、式（１）と（４）を比べて、　$A = B = \frac{1}{2}, a = b = 1$　とすると両者は等しくなる。よって、次の式が得られる。

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + +\{f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y(x_i) + hf(x_i, y_i))\}\frac{h}{2} \tag{5}$$

これが修正オイラー法である。また、一般的に、

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f(x_i + h, y(x_i) + hk_1)$$
$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (k_1 + k_2)\frac{h}{2} \tag{6}$$

という形で書かれる。