非線形波動方程式

みそ

2005.3.14

1　KdV 方程式

浅いところでの水の流れで生じる波の現象を表した方程式がある。その方程式は、コルテヴェーグード・フリース方程式と呼ばれ、略して KdV 方程式と書かれる。

浅いところの水の流れで生じる波は、通常に見られる波と違い複雑である。まず 1 つの波が浅瀬に向かって進んできたとしよう。その波は浅瀬にくると、いくつかの波に分かれ、それぞれの波は独立して進んでいく。この現象は比較的水の流れが穏やかな運河等で見られる。この現象を方程式で表したのが KdV 方程式である。

2　KdV 方程式の数値解

KdV 方程式は偏微分方程式であり一般的に

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + au(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + b\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3} \tag{1}$$

と表記される。a, b は任意の係数である。これを数値的に解くためにテイラー展開による近似を用いる。まず

$$t = \tau\Delta t, \qquad x = i\Delta x$$

として、$u(t \pm \Delta t, x)$ なら $u(\tau \pm 1, i)$ というふうに表すとする。

$$u(\tau \pm 1, i) = u(\tau, i) \pm \Delta t\frac{\partial u(\tau, i)}{\partial t} \tag{2}$$

$$u(\tau, i \pm 1) = u(\tau, i) \pm \Delta x\frac{\partial u(\tau, i)}{\partial x} \tag{3}$$

式 (2) より

$$\frac{\partial u(\tau,i)}{\partial t}=\frac{u(\tau+1,i)-u(\tau-1,i)}{2\Delta t} \tag{4}$$

式 (3) より

$$\frac{\partial u(\tau,i)}{\partial x}=\frac{u(\tau,i+1)-u(\tau,i-1)}{2\Delta x} \tag{5}$$

$\frac{\partial^3 u(\tau,i)}{\partial x^3}$ についてもテイラー展開を用いて近似したいのだが、その変化量は小さいため $u(t,x\pm 2\Delta x)$ をテイラー展開したものを用いる。すなわち

$$u(\tau,i\pm 2)=u(\tau,i)\pm 2\Delta x\frac{\partial u(\tau,i)}{\partial x}+2(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u(\tau,i)}{\partial x^2}\pm\frac{4}{3}(\Delta x)^3\frac{\partial^3 u(\tau,i)}{\partial x^3} \tag{6}$$

式 (5)(6) より

$$\frac{\partial^3 u(\tau,i)}{\partial x^3}=\frac{3}{8(\Delta x)^3}(u(\tau,i+2)-u(\tau,i-2)-2u(\tau,i+1)+2u(\tau,i-1)) \tag{7}$$

式 (4)(5)(7) を式 (1) に代入して整理すれば

$$\begin{aligned}u(\tau+1,i)&=u(\tau-1,i)-a\frac{\Delta t}{\Delta x}u(\tau,i)(u(\tau,i+1)-u(\tau,i-1))\\&-b\frac{3}{4}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^3}(u(\tau,i+2)-u(\tau,i-2)-2u(\tau,i+1)+2u(\tau,i-1))\end{aligned} \tag{8}$$

初期状態 $u(0,i)$ がわかっていて $u(1,i)$ を求めるためには $u(-1,i)$ の情報が必要という困難を回避するために初期条件

$$\frac{\partial u(0,i)}{\partial t}=\frac{u(0,i)-u(-1,i)}{\Delta t}=0$$

から

$$u(0,i)=u(-1,i)$$

これと式 (8) から

$$\begin{aligned}u(1,i)&=u(0,i)-a\frac{\Delta t}{\Delta x}u(0,i)(u(0,i+1)-u(0,i-1))\\&-b\frac{3}{4}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^3}(u(0,i+2)-u(0,i-2)-2u(0,i+1)+2u(0,i-1))\end{aligned} \tag{9}$$

また、境界条件として左右の端それぞれ 2 箇所は一定値としておく。