数学２Ｂ試験問題

担当: 和達 大樹

平成 25 年 7 月 31 日

下記の問 1 から 7 に答えよ。解答の順序は任意でよい。

- 以下で i は虚数単位 $(i^2=-1)$ とする。
- 周期 2π の周期関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

と実フーリエ級数に展開できる。このとき、パーセバルの等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx=\pi\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right\}$$

が成立する。

- 関数 $f(x)$ に対し、

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

で求められる $F(\omega)$ を $f(x)$ のフーリエ変換と呼ぶ。

[問 1] 次の値を求めよ。

(1) i^i　　(2) $\log(1+\sqrt{3}i)$

[問 2] 次の関数

$$f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$$

の $z=0$ を中心としたローラン展開を次の 2 つの場合に求めよ。
(1) $0<|z|<1$ のとき
(2) $|z|>1$ のとき

[問 3] 次の定積分の値を求めよ。以下で a は正の実数、k は実数である。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4+a^4}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$　　(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}dx$

[問 4] $f(z)$ が積分路 C 内で k 位の極を n_k 個、l 位の零点を m_l 個持つとする。このとき

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (\sum_l l m_l - \sum_k k n_k)$$

を示せ。

[問 5] 周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = x^2 \qquad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

で定義されている。

(1) $f(x)$ を実フーリエ級数に展開せよ。

(2) (1) の結果に $x = \pi$ を代入して無限級数の公式を導け。

(3) (1) の結果にパーセバルの等式を適用して無限級数の公式を導け。

[問 6] 次の関数 $f(x)$ をフーリエ変換せよ。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2d} & (|x| \leq d) \\ \\ 0 & (|x| > d) \end{cases}$$

[問 7] 以下で m, n を 0 以上の整数とする。m 次の第 1 種のチェビシェフの多項式 $T_m(x)$ は

$$\cos m\theta = T_m(\cos\theta)$$

で定義される。

(1) $T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ を求めよ。(三角関数の加法定理を用いる。)

(2)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{1}{2} & (m = n \neq 0) \\ 1 & (m = n = 0) \end{cases}$$

を用い、

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

の値を求めよ。また、$T_m(x)$ が区間 $[-1, 1]$、重み関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ としたとき直交多項式となっていることを示せ。