数学２B試験問題

担当: 和達 大樹
平成 24 年 7 月 18 日

下記の問 1 から 10 に答えよ。解答の順序は任意でよい。

複素関数論

以下で i は虚数単位 $(i^2 = -1)$ とする。

[問 1]
次の値を求めよ。

(1) i^i　　(2) $(-1)^i$

(3) $\log i$　　(4) $\log(1 - \sqrt{3}i)$

[問 2] 次の関数

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$$

の

(1) $z = 0$ のまわり $(0 < |z| < 1)$
(2) $z = i$ のまわり $(0 < |z - i| < 1)$
でのローラン展開を求めよ。

[問 3]
次の定積分を求めよ。以下で a は正の実数である。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4}$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + a^4}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta$　　(4) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx$

[問 4] 次の多価関数 $f(z)$ の分岐点を求め、z 平面を切断せよ。リーマン面はどのようになるか。

$$f(z) = \sqrt{z(z^2+1)}$$

フーリエ級数

以下で周期 2π の周期関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

と実フーリエ級数に展開できることを使ってよい。

[問 5]　関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} -l & (-l < x < 0) \\ x & (0 < x < l) \end{cases}$$

で定義されている。

(1) $f(x)$ を $-l < x < l$ の区間で周期 $2l$ の実フーリエ級数に展開せよ。

(2) (1) の結果を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

となることを示せ。

[問 6] 周期 2π の周期関数 $f(x)$ を三角多項式

$$T_N(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

で最もよく近似するためには c_n, d_n をどう選んだらよいかという問題を考える。x が実数であるとき $f(x)$ も実数であるとする。近似のよさを計る尺度として、次の平均 2 乗誤差

$$E(f - T_N) = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_N(x))^2 dx$$

を考える。$E(f - T_N)$ が最小となるのは、

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad d_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

のとき、つまり c_n と d_n の値がフーリエ係数に一致するときであることを示せ。

フーリエ変換

関数 $f(x)$ に対し、

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

で求められる $F(\omega)$ を $f(x)$ のフーリエ変換と呼ぶ。フーリエ逆変換は

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

となる。

[問 7] 次の関数 $f(x)$ をフーリエ変換せよ。

(1)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2d} & (|x|\leq d) \\ \\ 0 & (|x|>d) \end{cases}$$

(2)

$$f(x)=\frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}$$

[問 8] 次の関数 $F(\omega)$ をフーリエ逆変換せよ。

(1)

$$F(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2} \qquad (a>0)$$

(2)

$$F(\omega)=\frac{1}{a+i\omega} \qquad (a>0)$$

直交多項式

[問 9] x の多項式 $u(x),\, v(x)$ に対し、内積を

$$(u, v) = \int_I u(x)^* v(x) \rho(x) dx$$

で定義する。ここで、$\rho(x)$ は重み関数と呼ばれ、I の内部で正の値を取る。以下で規格化は考えなくてよい。

(1) $I = [-1, 1],\, \rho(x) = 1$ のとき、$\{1,\, x,\, x^2\}$ をグラム・シュミットの方法で直交化せよ。
(2) $I = (-\infty, \infty),\, \rho(x) = e^{-x^2}$ のとき、$\{1,\, x,\, x^2\}$ をグラム・シュミットの方法で直交化せよ。

偏微分方程式

[問 10] 熱伝導方程式

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \qquad (0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0)$$

を、境界条件

$$\frac{\partial f(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(\pi,t)}{\partial x} = 0 \qquad (t > 0)$$

と初期条件

$$f(x,0) = \sin^2 x \qquad (0 \leq x \leq \pi)$$

の下で解け。