解答例

(I) $f(x)=\frac{1}{x}$のFourier変換は$F(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}e^{-i\gamma x}dx$.

i) $\gamma<0$ のとき

問題にある経路を考えると，その内部で$f(x)$は正則だから

$$F(\gamma)=\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon}^{R}+\int_{-R}^{-\varepsilon}\right)\frac{1}{x}e^{-i\gamma x}dx$$

$$=-\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{\pi}\frac{1}{Re^{i\theta}}e^{-i\gamma Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta\right.$$
$$\left.-\int_0^{\pi}\frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}}e^{-i\gamma\varepsilon e^{i\theta}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right]$$

ここで

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{1}{Re^{i\theta}}e^{-i\gamma Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta\right|$$
$$\leq\int_0^{\pi}e^{\gamma R\sin\theta}d\theta\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\gamma R\frac{2\theta}{\pi}}d\theta=\frac{\pi}{\gamma R}\left(e^{\gamma R}-1\right)\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

だから

$$F(\gamma)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\pi}ie^{-i\gamma\varepsilon e^{i\theta}}d\theta=i\pi.$$

ii) $\gamma>0$ のとき

同様に

$$F(\gamma)=-\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{Re^{i\theta}}e^{-i\gamma Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta\right.$$
$$\left.+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}}e^{-i\gamma\varepsilon e^{i\theta}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right]$$

$$\left|\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{Re^{i\theta}}e^{-i\gamma Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta\right|$$
$$\leq\int_{\pi}^{2\pi}e^{\gamma R\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\gamma R\sin\theta}d\theta\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\gamma R\frac{2\theta}{\pi}}$$
$$=-\frac{\pi}{\gamma R}\left(e^{-\gamma R}-1\right)\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

だから

$$F(\gamma)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{2\pi}ie^{-i\gamma\varepsilon e^{i\theta}}d\theta=-i\pi.$$

$$\therefore F(\gamma)=-i\pi\,\mathrm{sign}\,\gamma$$

(II) $\frac{d^2}{dx^2}f(x)+2\frac{d}{dx}f(x)-3f(x)=e^{-x}$ $\cdots$ (＊)

の左辺をLaplace変換すると

$$\{p^2\mathcal{L}_f(p)-pf(0)-f'(1)\}+2\{p\mathcal{L}_f(p)-f(0)\}-3\mathcal{L}_f(p)$$

$$=(p^2+2p-3)\mathcal{L}_f(p)-1$$ ↖第10回(7)参照

(＊)の右辺をLaplace変換すると

$$\int_0^\infty e^{-x}e^{-px}dx=\int_0^\infty e^{-(1+p)x}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{1+p}e^{-(1+p)x}\right]_0^\infty=\frac{1}{1+p}$$

だから

$$(p^2+2p-3)\mathcal{L}_f(p)-1=\frac{1}{1+p},$$

即ち

$$\mathcal{L}_f(p)=\frac{1}{(p+3)(p-1)}\left(1+\frac{1}{1+p}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+3}\right)\left(1+\frac{1}{p+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+3}-\frac{1}{p+1}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{8}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{8}\frac{1}{p+3}$$

$\frac{1}{p-c}$のLaplace逆変換がe^{cx}であること(第10回(5))

を用いて

$$f(x)=\frac{3}{8}e^{x}-\frac{1}{4}e^{-x}-\frac{1}{8}e^{-3x}.$$

(III) $u(x,t)=\frac{1}{2}a_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$ と xについて

Fourier級数展開すると，これは境界条件を満たす.

これを $\frac{\partial}{\partial t}u=\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$ に入れると

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}a_0(t)=0\\ \frac{d}{dt}a_n(t)=-\left(\frac{n\pi\sigma}{L}\right)^2a_n(t)\ (n\neq0)\\ \frac{d}{dt}b_n(t)=-\left(\frac{n\pi\sigma}{L}\right)^2b_n(t)\end{cases}\text{より}\begin{cases}a_0(t)=a_0(0)\\ a_n(t)=a_n(0)e^{-\left(\frac{n\pi\sigma}{L}\right)^2t}\\ b_n(t)=b_n(0)e^{-\left(\frac{n\pi\sigma}{L}\right)^2t}\end{cases}$$

初期条件から $a_0(0)=\frac{2}{L}\int_0^L\lambda x\,dx=\lambda L$, $b_n(0)=0$,

$$a_{n\neq0}(0)=\frac{2\lambda}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx=-\frac{2\lambda}{n\pi}\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\begin{cases}0\ (n:\text{even})\\ \frac{-4L\lambda}{(n\pi)^2}\ (n:\text{odd})\end{cases}$$

$$\therefore u(x,t)=\frac{\lambda L}{2}-\frac{4L\lambda}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{-\left\{\frac{(2n-1)\pi\sigma}{L}\right\}^2t}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{L}.$$