2010年度秋　数理社会学

石田淳
aishida@kwansei.ac.jp

目 次

第1章　数理社会学：イントロダクション

1.1　授業のテーマ

数理社会学の最終的な目標は，数学言語によるモデルを分析することで，社会現象のメカニズムを解明することにある．本講義では，いくつかの種類の数理モデルを紹介し，数理社会学のエッセンスを伝えることを目指す．

1.2　授業計画

1回目 イントロダクション

2回目 数理社会学とはどのような学問か？

3回目 囚人のジレンマとゲーム理論 (1)

4回目 囚人のジレンマとゲーム理論 (2)

5回目 囚人のジレンマとゲーム理論 (3)

6回目 相対的剥奪モデル（ブードン，高坂）

7回目 階層イメージ・階層帰属意識生成モデル（ファラロ・高坂）(1)

8回目 階層イメージ・階層帰属意識生成モデル（ファラロ・高坂）(2)

9回目 親族構造のモデル（ホワイト）(1)

10回目 親族構造のモデル（ホワイト）(2)

11回目 人種間分離モデル（シェリング）

12回目 二国間軍拡競争モデル（リチャードソン）(1)

13回目 二国間軍拡競争モデル（リチャードソン）(2)

14回目 補足とまとめ

1.3 授業方法

- 講義形式で行う．各モデルについて，そのモデルで必要とされる数学的知識から分析結果までを 1–3 回にわたって解説する．授業中の小テストや宿題によって，受講生自らがモデルを「動かす」機会を作る．
- 教科書は特に指定しない．毎回レジュメを配布する．
- 「社会を読み解くための基礎数学 B」をあらかじめ受講するか，それと同等の予備知識を持っていることが好ましい．ただし，丁寧に学習していくので，事前の数学的知識が（基本的な事柄以外）なくてもフォローできるものと期待する．必要なのはやる気と向学心である．また，各モデルはそれぞれ独立しているものの，数理社会学的思考法を身につけるためには毎回出席しないと学習効果はきわめて薄くなると予想される．
- 成績評価方法：授業中の小テスト，宿題ならびに，学期末レポートもしくは学期末テストにより評価する．出席点はない．
- 他の受講者の受講の妨げとなるような行為は厳禁である．このルールを守れない者は授業を受ける資格がない．

1.4 参考文献

基本的に，各論ごとに参考文献を指示する．数理社会学分野の手広いトピックを見渡すためには，

土場学ほか編，2004,『社会を〈モデル〉でみる』勁草書房

がもっともよい手引きになるであろう．モデル・ビルディングの入門書として定評があるのは，

チャールズ・A・レイブ，ジェームズ・G・マーチ，1992,『社会科学のためのモデル入門』ハーベスト社

である．そのほか数理社会学研究のオムニバスとしては

小林淳一・木村邦博，1997,『数理の発想 (アイディア) でみる社会』ナカニシヤ出版
小林淳一ほか，2000,『社会のメカニズム 』ナカニシヤ出版
イアン・ブラッドリー, ロナルド・L・ミーク，1999,『社会のなかの数理——行列とベクトル入門』九州大学出版会

がある．さらに叢書として

『数理社会学シリーズ 1-5』勁草書房

が出版されているが，初学者にはやや専門的すぎるかもしれない．

本講義では，高級な数学はほとんど用いないが，本講義で必要なレベルの数学を復習する場合は，

矢野健太郎・田代嘉宏，1993,『社会科学者のための基礎数学（改訂版）』裳華房

などがよいだろう．

第 2 章　数理社会学とはどのような学問か？

「数理社会学第 2 章（数理社会学とはどのような学問か）.pdf」を参照せよ.

第3章　囚人のジレンマとゲーム理論

本章では,「囚人のジレンマゲーム」に焦点を当てながらゲーム理論の初歩を導入する．囚人のジレンマゲーム（PD ゲーム）は，社会学の根本問題である**秩序問題**を表現するものとして，また,個人的合理性を前提とした上でいかにして人々の協力行動を引き出すかという**社会的ジレンマ問題**を表現するものとして，長らく社会学者の関心を集めてきた．ここでは，標準型ゲームとしての囚人のジレンマゲームの構造を検討し，さらに無限繰り返しゲームの枠組みを導入することでジレンマが回避できる可能性があることを示す.

3.1　2 つのゲーム

3.1.1　グーパージャンケン

グーとパーだけで行う特殊なジャンケンを考える．プレイヤーは 2 人で，結果に応じて第三者から次の金額が支払われる.

表 3.1: グーパージャンケン

		プレイヤー 2	
		グー	パー
プレイヤー 1	グー	5000 円，5000 円	0 円，10000 円
	パー	10000 円，0 円	1000 円，1000 円

お互いのプレイヤーは何を出すか，互いに知らないとする．また，お互いのプレイヤーは自分の取り分をなるべく大きくしようとしているとする．このとき，あなたが一方のプレイヤーであれば，あなたはグーとパー，どちらを選択するだろうか？

3.1.2　囚人のジレンマ

次の例はゲーム理論の中でも最も有名なゲームである.

> 2 人のギャングが逮捕され，刑務所に拘留されている．2 人は，互いに話をしたり，メッセージを交換したりすることが絶対にできない状態で，独房に入れられている．警察は，重罪で 2 人を有罪にするだけの十分な証拠はもっていないことを認めている．そのため，それより軽微な罪で，ともに 1 年の禁固刑に処す意向をもっている．警察は同時に，2 人の囚人に（……）取引をもちかける．それは，もし相手に不利となる証

> 言をするなら釈放してやろう，ただしパートナーは本件で 3 年の禁固刑に処せられる，というものである.（……）もし，両方が相手に不利となる証言をした場合は，2 人とも 2 年の刑になるというのだ.（パウンドストーン 1995: 154-5）

あなたが囚人の一方だとすると，あなたは黙秘を通すだろうか，それとも自白するだろうか？

表 3.2: 囚人のジレンマ

		プレイヤー 2	
		黙秘	自白
プレイヤー 1	黙秘	1 年，1 年	3 年，0 年
	自白	0 年，3 年	2 年，2 年

3.2 ゲームとは何か

これらの状況は標準型ゲームとしてみると同型の構造をもっている．ゲーム理論が扱うゲームにはプレイヤー同士の協力・提携を想定した「協力ゲーム」と，それらを想定しない「非協力ゲーム」がある．**標準型ゲーム**[1]とは各プレイヤーが同時に（あるいは各々の手を知らずに）手を出すような非協力ゲームである（例えばジャンケン）．もう 1 つの非協力ゲームの形としては展開型ゲーム[2]があるが，これはプレイヤーが交互に手を出すようなゲームである（例えばチェス）．

さて，ここでいう**ゲーム**とは,「複数の意志決定主体が，それぞれの目的の実現を目指して相互に依存し合う状況」（岡田 1996: 2）のことをいう．意志決定主体のことをゲーム理論では**プレイヤー**という．プレイヤーは人である必要はなく，集団であっても何らかの生物であってもよい．プレイヤーは「自分の目的を達成するために，相互依存状況下において最も適した行為を選択する」という意味で**合理的**であると仮定される．

そして，ゲーム理論の目的は，こうしたゲーム状況からどのような結果（解）がもたらされるかを分析することにある．

3.3 標準型ゲームの構成要素

標準型ゲームは以下の 3 つの要素によって構成される．つまり，この 3 つについて定義を与えてやると 1 つの標準型ゲームができる．

(1) ゲームの**プレイヤー**

(2) 各プレイヤーのとりうる**戦略**

(3) 戦略の組み合わせごとに各プレイヤーが受け取る**利得（利得関数）**

---

[1]戦略型ゲーム，同時手番ゲームともいわれる．

[2]逐次手番ゲームともいわれる．

3.3.1　囚人のジレンマの構成要素

(1) **プレイヤー**

プレイヤー集合を N と表し，各プレイヤーを自然数で表す[3]．$N = \{1, 2\}$.

(2) **戦略**

プレイヤー i のとりうる戦略の全体を**戦略集合**と呼び S_i で表す．S_i に属する任意の戦略を s_i と表す．戦略のことを，くだけた言い方として「手」ということもある．集合論の標記で表せば $s_i \in S_i$ である[4]．囚人のジレンマの例でいえば

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{\,\text{黙秘}, \text{自白}\,\} \\
S_2 &= \{\,\text{黙秘}, \text{自白}\,\}
\end{aligned}
$$

である．さらに，すべての可能な戦略の組み合わせを考える．囚人のジレンマの例でいえば，

$$S_1 \times S_2 = \{(\text{黙秘}, \text{黙秘}), (\text{黙秘}, \text{自白}), (\text{自白}, \text{黙秘}), (\text{自白}, \text{自白})\}$$

である[5]．これらの要素はゲーム状況の起こりうる結果を示している．

(3) **利得（利得関数）**

それぞれの結果に対してプレイヤーの中で「望ましさの程度」が決まっているとする．この望ましさの程度を数値に置き換えたものが，各プレイヤーのそれぞれの結果についての**利得**である．それぞれの結果について利得を対応させる関数を**利得関数**といい，プレイヤー i のもつ利得関数を u_i で表す[6].

各プレイヤーは他のプレイヤーの選択を予測しながら，自らの利得を最大化するような戦略を選択する．同時に，各プレイヤーは他のプレイヤーも自分と同様の考え方にもとづき戦略を選択すると考えている．これがプレイヤーの合理性のより具体的な意味である．利得を最大化する戦略を選ぶためには，利得の数値そのものではなく，利得間の大小関係が本質的に重要な情報となる．ゆえに，利得の大小関係が変わらない限り，どのような利得関数を仮定しても，ゲームの利得構造自体は同一である．

囚人のジレンマの例で，刑期にマイナスを付けたものがプレイヤーの利得だとすると，各プレイヤーの利得関数 u_i は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
u_1 &: S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \\
u_2 &: S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

[3]中括弧 $\{\ \}$ は集合の中身を表す．
[4]$a \in A$ は要素 a が集合 A に属していることを示す．
[5]集合 A, B の要素の可能な組み合わせの集合を集合 A, B の**直積**といい，$A \times B$ で表す
[6]利得は実数集合 $\mathbb{R}$ の要素である．

$$u_1(黙秘, 黙秘) = -1, \quad u_1(黙秘, 自白) = -3$$
$$u_1(自白, 黙秘) = 0, \quad u_1(自白, 自白) = -2$$

$$u_2(黙秘, 黙秘) = -1, \quad u_2(黙秘, 自白) = 0$$
$$u_2(自白, 黙秘) = -3, \quad u_2(自白, 自白) = -2$$

3.3.2 利得表

ところで，2 人ゲームでそれぞれの戦略と利得を表 3.3 のように表したものを，そのゲームの**利得表**という．

表 3.3: 2×2 対称ゲームの一般的記述

	C	D
C	$R,\ R$	$S,\ T$
D	$T,\ S$	$P,\ P$

表 3.1 のグーパージャンケンと表 3.2 の囚人のジレンマは，表 3.3 の利得の表記でいえば，各プレイヤーとも

$$T > R > P > S$$

となる利得関数をもっており，ゲームの利得構造としては同一である．

3.3.3 標準型ゲームの構成要素の一般的記述

(1) **プレイヤー**

プレイヤー集合を N と表し，各プレイヤーを自然数で表す．$N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(2) **戦略**

プレイヤー i のとりうる戦略の全体を戦略集合と呼び S_i で表す．

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$$
$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$$

(3) **利得（利得関数）**

任意の i について $u_i : S \to \mathbb{R}$ が定義されている．

$G = (N; S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n)$ を標準型ゲームという．

3.4　支配戦略

3.4.1　支配戦略の組

再びグーパージャンケンについて考えてみよう．

表 3.4: グーパージャンケン（再録）

	グー	パー
グー	5，5	0，10
パー	10, 0	1，1

まずはプレイヤー 1 に焦点を当てる．プレイヤー 2 が「グー」をとったとき，プレイヤー 1 は,

$$u_1(\text{パー}, \text{グー}) = 10 > 5 = u_1(\text{グー}, \text{グー})$$

なので,「パー」を選んだ方が得である．同様に，プレイヤー 2 が「パー」をとったとき，プレイヤー 1 は,

$$u_1(\text{パー}, \text{パー}) = 1 > 0 = u_1(\text{グー}, \text{パー})$$

なので，やはり「パー」を選んだ方が得である．つまり，相手がどのような手を選んだとしても，プレイヤー 1 は「パー」を選んだ方が常に得をする．ゆえに，プレイヤー 1 が合理的であれば常に「パー」を選択するだろう．プレイヤー 2 についても同様の推論で常に「パー」を選択すると予測できる．

結局，実現する結果は (パー, パー) で，それぞれのプレイヤーに 1 が支払われると結論づけることができる．

このゲームの「パー」のような戦略，つまり，他のプレイヤーがどのような戦略を選んでも，もっとも利得が高くなるような戦略のことを **（強）支配戦略** という[7]．ここでの結果の分析は，支配戦略の組を見出すという方法で行われたことになる．

3.4.2　支配される戦略の消去

しかしながら，どのようなゲームでも支配戦略の組が見つかるとは限らない．例えば表 3.4 のグーパージャンケンの利得行列を少し変えた次のゲームを検討しよう．

プレイヤー 1 については先程と同様に「パー」が支配戦略であることが分かる．一方，プレイヤー 2 についてみると,

$$u_2(\text{グー}, \text{グー}) = 5 \quad < \quad 10 = u_2(\text{グー}, \text{パー})$$
$$u_2(\text{パー}, \text{グー}) = 1 \quad > \quad 0 = u_2(\text{パー}, \text{パー})$$

[7] より形式的には，プレイヤー i の戦略 $\hat{s}_i \in S_i$ が**強支配戦略**であるとは，すべての $s_j \in S_j$ $(i \neq j)$ とすべての $s_i \in S_i \setminus \{\hat{s}_i\}$ について

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_n) > u_i(s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$$

が成り立つことをいう．

表 3.5: グーパージャンケン 2

	グー	パー
グー	5，5	0，10
パー	10, 1	1，0

なので,「パー」も「グー」も支配戦略ではない．

しかし，このようなケースでも次のように考えることができる．

プレイヤー 1 にとって「パー」が支配戦略であるならば，支配される戦略である「グー」は決して選ばないと考えられる．というのも,「グー」を選べば必ず損をしてしまうからである．そして，プレイヤー 2 も合理的な推論によってプレイヤー 1 が「グー」を決して選択しないことを予測することができる．つまり両プレイヤーにとってプレイヤー 1 の選択肢である「グー」は考慮しなくてもよいものなのである．ゆえに，表 3.5 は次のように書き換えることができる．

表 3.6: グーパージャンケン 2（支配される戦略を消去）

	グー	パー
パー	10, 1	1，0

支配される戦略を消去したあとのゲームでは，プレイヤー 2 のみが選択を行う．このとき，

$$u_2(\text{パー}, \text{グー}) = 1 > 0 = u_2(\text{パー}, \text{パー})$$

なので，結局，戦略の組 (パー, グー) が実現すると予測することができる．

このように支配される戦略を段階的に消去し，より簡単なゲームに還元することによって最終的に実現する戦略の組を予測することができる場合がある．

しかし，この方法でも実現する戦略の組を予測することができない場合が数多く存在する．このために，より一般的な概念として**最適反応戦略**という考え方を導入する．

3.5 最適反応戦略

3.5.1 両性の戦い

以下のゲームは「両性の戦い」として知られるゲームである（ギボンズ 1995: 12-3）．もともとはカップルがデートの行き先を決めるという設定であったが，より抽象的にプレイヤー 1 とプレイヤー 2 としておこう．プレイヤー 1 はボクシングよりもオペラに，プレイヤー 2 はオペラよりもボクシングに行きたがっている．しかし 2 人とも別々に行動するよりも一緒にいた方がいいと思っている．利得表は以下の通りである．

プレイヤー 1 について，

$$\begin{aligned} u_1(\text{オペラ}, \text{オペラ}) = 2 &\quad > \quad 0 = u_1(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) \\ u_1(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) = 0 &\quad < \quad 1 = u_1(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) \end{aligned}$$

表 3.7: 両性の戦い

	オペラ	ボクシング
オペラ	2，1	0，0
ボクシング	0，0	1，2

同様にプレイヤー 2 について，

$$\begin{aligned} u_2(\text{オペラ}, \text{オペラ}) = 1 \quad &> \quad 0 = u_2(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) \\ u_2(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) = 0 \quad &< \quad 2 = u_2(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) \end{aligned}$$

である．つまり，両プレイヤーとも支配戦略をもっていない．ゆえに，支配戦略を用いた結果の予測ができない．

そこで，より包括的な概念として**最適反応戦略**という考え方を導入する．

3.5.2 最適反応戦略の定義

他のプレイヤーがとる戦略の組が与えられたとき，自らの利得を最大化する戦略を**最適反応戦略**といい，プレイヤー i の最適反応戦略を $s_i^* \in S_i$ と表す[8]．

たとえば，先の表 3.7 の両性の戦いの場合，プレイヤー 1 にとっての最適反応は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\text{プレイヤー 2 がオペラ} &&\Rightarrow \quad \text{最適反応戦略 } s_1^* \text{ はオペラ} \\ &\text{プレイヤー 2 がボクシング} &&\Rightarrow \quad \text{最適反応戦略 } s_1^* \text{ はボクシング} \end{aligned}$$

同様に，プレイヤー 2 にとっての最適反応は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\text{プレイヤー 1 がオペラ} &&\Rightarrow \quad \text{最適反応戦略 } s_2^* \text{ はオペラ} \\ &\text{プレイヤー 1 がボクシング} &&\Rightarrow \quad \text{最適反応戦略 } s_2^* \text{ はボクシング} \end{aligned}$$

3.6 ナッシュ均衡

3.6.1 最適反応戦略の組み合わせ

ここで，表 3.7 の両性の戦いにおける 4 つの戦略の組について，他のプレイヤーの戦略を所与とした場合のもう一方のプレイヤーの最適反応戦略を考えてみよう．

行 2 に注目する．戦略の組 (オペラ, ボクシング) が実現したと仮定してみよう．このとき両プレイヤーの戦略とも，相手の戦略に対する最適反応にはなっていない．ゆえに，プレイヤーの合理性から考えて，両プレイヤーは戦略を最適反応であるもう一方の戦略に変更しようとするだろう．

---

[8] より形式的には，

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$$

のとき，プレイヤー i の戦略 $s_i^* \in S_i$ は，他のプレイヤーがとる戦略の組 $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ に対する**最適反応戦略**であるという．

表 3.8: 両性の戦いにおける最適反応戦略

戦略の組 (s_1, s_2)		s_1^*	s_2^*
1.	(オペラ, オペラ)	オペラ	オペラ
2.	(オペラ, ボクシング)	ボクシング	オペラ
3.	(ボクシング, オペラ)	オペラ	ボクシング
4.	(ボクシング, ボクシング)	ボクシング	ボクシング

同様のことは行 3 の (ボクシング, オペラ) にもいえる．つまり，行 2，3 の戦略の組がこのまま実現するとは考えられない．

一方，行 1 の (オペラ, オペラ) は両プレイヤーの戦略とも，相手の戦略に対する最適反応になっている．つまり，いったん (オペラ, オペラ) が実現した場合，どちらのプレイヤーもちがう戦略に変更しようとは考えない．行 4 の (ボクシング, ボクシング) にも同じことが当てはまる．

いったん実現したら，結果が変わらないという意味において，戦略の組 (オペラ, オペラ) と (ボクシング, ボクシング) は**均衡**状態にある．こうしたゲームにおける均衡状態をとくに**ナッシュ均衡**という．

3.6.2 ナッシュ均衡の定義

戦略の組において，それぞれのプレイヤーの戦略が互いに他のプレイヤーの戦略の組に対して最適反応戦略となっているとき，その戦略の組を**ナッシュ均衡**という[9]．

別の言い方をすれば，あるプレイヤー 1 人だけが戦略を変えても得をしない，ということがすべてのプレイヤーについて成立するとき，その戦略の組はナッシュ均衡である．この定義を 2 人ゲームについて数学的に表すと次のようになる．

定義 1 (2 人ゲームにおけるナッシュ均衡). 2 人ゲームにおいて，戦略の組 (s_1^*, s_2^*) が**ナッシュ均衡である**とは，プレイヤー 1 の戦略集合 S_1 の要素であるどのような s_1 に対しても

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*)$$

が成り立ち，かつ，プレイヤー 2 の戦略集合 S_2 の要素であるどのような s_2 に対しても

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2)$$

が成り立つことである[10]．

[9] より厳密にいえば，戦略の組 $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ がナッシュ均衡であるとは，各プレイヤー i の戦略 s_i^* が他の $n-1$ 人のプレイヤーの戦略の組 $(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ に対する最適反応戦略となっていることをいう．

[10] n 人ゲームにおいては，すべてのプレイヤー i について，S_i の要素であるどのような s_i に対しても

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$$

が成り立つことがナッシュ均衡の必要十分条件である．

プレイヤーが十分に合理的であるならば，ゲームの結果としてナッシュ均衡が実現すると予測することができる[11]．逆にナッシュ均衡でないことは次のように定義できる．

定義 2 (2 人ゲームにおける非ナッシュ均衡)**.** 2 人ゲームにおいて，戦略の組 (s_1', s_2') が**ナッシュ均衡でない**とは，次のいずれかもしくは両方が成立することをいう．

- $u_1(s_1', s_2') < u_1(s_1'', s_2')$ を満たすプレイヤー 1 の戦略 $s_1''(\neq s_1')$ が存在する．
- $u_2(s_1', s_2') < u_2(s_1', s_2'')$ を満たすプレイヤー 2 の戦略 $s_2''(\neq s_2')$ が存在する．

3.6.3　両性の戦いのナッシュ均衡

表 3.7 の両性の戦いにおけるナッシュ均衡を確認しよう．

(1) (オペラ, オペラ) について，

$$\begin{aligned} u_1(\text{オペラ}, \text{オペラ}) = 2 \quad &> \quad 0 = u_1(\text{ボクシング}, \text{オペラ}), \\ u_2(\text{オペラ}, \text{オペラ}) = 1 \quad &> \quad 0 = u_2(\text{オペラ}, \text{ボクシング}). \end{aligned}$$

ゆえに，(オペラ, オペラ) は**ナッシュ均衡である**.

(2) (オペラ, ボクシング) について，

$$\begin{aligned} u_1(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) = 0 \quad &< \quad 1 = u_1(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}), \\ u_2(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) = 0 \quad &< \quad 1 = u_2(\text{オペラ}, \text{オペラ}). \end{aligned}$$

ゆえに，(オペラ, ボクシング) は**ナッシュ均衡でない**.

(3) (ボクシング, オペラ) について，

$$\begin{aligned} u_1(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) = 0 \quad &< \quad 2 = u_1(\text{オペラ}, \text{オペラ}), \\ u_2(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) = 0 \quad &< \quad 2 = u_2(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}). \end{aligned}$$

ゆえに，(ボクシング, オペラ) は**ナッシュ均衡でない**.

(4) (ボクシング, ボクシング) について，

$$\begin{aligned} u_1(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) = 1 \quad &> \quad 0 = u_1(\text{オペラ}, \text{ボクシング}), \\ u_2(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) = 2 \quad &> \quad 0 = u_2(\text{ボクシング}, \text{オペラ}). \end{aligned}$$

ゆえに，(ボクシング, ボクシング) は**ナッシュ均衡である**.

結局，ナッシュ均衡は (オペラ, オペラ),(ボクシング, ボクシング) の 2 つである．

表 3.9: 囚人のジレンマゲーム

	黙秘	自白
黙秘	$-1,\ -1$	$-3,\ 0$
自白	$0,\ -3$	$-2,\ -2$

3.6.4　囚人のジレンマのナッシュ均衡

ふたたび囚人のジレンマゲームを考えよう．

このとき，(自白, 自白) が唯一のナッシュ均衡となる．一般に，支配戦略の組，もしくは支配戦略の段階的消去で残る戦略の組は必ずナッシュ均衡になる．ただし，逆は必ずしも真ならず．つまり，ナッシュ均衡であるからといって，それが支配戦略の組，もしくは支配戦略の段階的消去で残る戦略の組であるとは限らない．

【表 3.5 グーパージャンケン 2 におけるナッシュ均衡を見出し，それが支配戦略の段階的消去で残る戦略の組と一致することを確認せよ】

3.7　パレート最適性

囚人のジレンマゲームにおいて，(自白, 自白) が唯一のナッシュ均衡となることがわかった．そこで，次にこの結果が社会的に（この場合 2 人にとって）望ましい結果であるかを考えることにしよう．このとき用いられる基準が**パレート最適性**である．

3.7.1　パレート最適の定義

パレート最適性とはもともと財の社会的分配状態の望ましさを評価する 1 つの基準であった．ゲーム状況に特化してパレート最適の定義を与えると以下のようになる．

ある戦略の組 $(s_1, \dots, s_n)$ から別の戦略の組へと移行しようとすると，少なくとも 1 人のプレイヤーの利得が減少してしまう場合，その戦略の組 $(s_1, \dots, s_n)$ は**パレート最適である**という．逆に，誰の利得を下げることもなく，かつ，少なくとも 1 人にとっては利得が大きくなるような戦略の組が他に存在する場合，その戦略の組 $(s_1, \dots, s_n)$ は**パレート最適でない**という．2 人ゲームについて数学的な定義を与える．

定義 3 (2 人ゲームにおけるパレート最適). 2 人ゲームにおいて，戦略の組 (s_1, s_2) が**パレート最適である**とは，他のすべての可能な戦略の組 (s'_1, s'_2) について，

$$u_1(s_1, s_2) > u_1(s'_1, s'_2)$$

もしくは

$$u_2(s_1, s_2) > u_2(s'_1, s'_2)$$

[11] しかし，ナッシュ均衡という概念自体は，プレイヤーの合理性に基づき均衡の安定性を保証するロジックは備えていても，なぜこの均衡が実現するかを説明するものではない，という議論もある（石原・金井 2002: 25-8）．

が成立することである[12].

定義 4 (2 人ゲームにおけるパレート非最適)**.** 2 人ゲームにおいて，戦略の組 (s_1, s_2) が**パレート最適でない**とは，ある他の戦略の組 (s'_1, s'_2) が存在し，

$$u_1(s_1, s_2) < u_1(s'_1, s'_2) \quad \text{かつ} \quad u_2(s_1, s_2) \le u_2(s'_1, s'_2)$$

もしくは

$$u_2(s_1, s_2) < u_2(s'_1, s'_2) \quad \text{かつ} \quad u_1(s_1, s_2) \le u_1(s'_1, s'_2)$$

が成立することである[13].

例えば，表 3.7 の両性の戦いにおけるナッシュ均衡 (オペラ, オペラ)，(ボクシング, ボクシング) はどちらもパレート最適である.

3.7.2 囚人のジレンマの何がジレンマか？

表 3.9 の囚人のジレンマゲームでは (自白, 自白) がナッシュ均衡になった．このとき両プレイヤーは 2 年の刑期を課せられることになる．では，この実現する戦略の組 (自白, 自白) は果たしてパレート最適だろうか？　別の戦略の組 (黙秘, 黙秘) と比べてみると

$$u_1(\text{自白}, \text{自白}) = -2 \quad < \quad -1 = u_1(\text{黙秘}, \text{黙秘})$$
$$u_2(\text{自白}, \text{自白}) = -2 \quad < \quad -1 = u_2(\text{黙秘}, \text{黙秘})$$

なので，(自白, 自白) はパレート最適ではない．言い換えると，両プレイヤーとも黙秘した場合は刑期が 1 年軽くなり，双方にとって状況は改善されるのである．しかしながら，合理的なプレイヤーを仮定した場合，よりよい結果が実現しなくなる．これが囚人のジレンマのジレンマたるゆえんである．そしてこの問題を専門用語で言えば，ナッシュ均衡がパレート最適でないこと，ということができるのである[14].

3.8 2×2 対称ゲームの 4 類型

ここでは，さらに一般的に 2×2 対称ゲームの 4 つの類型を取り上げ，それぞれのゲーム類型のナッシュ均衡を分析する．あわせてそれらのゲーム類型がどのように解釈されているかを概観する.

[12] n 人ゲームの場合は，戦略の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ が**パレート最適である**とは，他のすべての可能な戦略の組 $(s'_1, \ldots, s'_n)$ について，

$$\exists i \in N, u_i(s_1, \ldots, s_n) > u_i(s'_1, \ldots, s'_n)$$

が成立することである.

[13] n 人ゲームの場合は，戦略の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ が**パレート最適でない**とは，ある戦略の組 $(s'_1, \ldots, s'_n)$ が存在し，

$$\forall i \in N, u_i(s_1, \ldots, s_n) \le u_i(s'_1, \ldots, s'_n), \quad \text{かつ} \quad \exists j \in N, u_j(s_1, \ldots, s_n) < u_j(s'_1, \ldots, s'_n)$$

が成立することである.

[14] パレート最適性は，社会的な望ましさについての 1 つの基準と考えられているが，次のような問題がある．例えば，社会的な財の総量が 100 と決まっているとする．これを 2 人で分けるケースを考える．このとき財をどのように分けたとしても，その分け方は他の分け方に対してパレート最適になっているのである．というのも，どのような分け方に変更したとしても，どちらかの財の量は必ず減少するからだ．ゆえに財の分け方が (50,50) であっても，(1,99) であっても，これらをパレート最適性の基準で優劣を付けることはできないのである.

3.8.1 2×2 対称ゲームとは

プレイヤーが 2 人，それぞれの戦略が 2 種類のゲームを 2×2 ゲームという．また，各プレイヤーの戦略の数と種類が等しく，それぞれの戦略の組み合わせについて自他の区別なく同じ利得が得られるようなゲームを対称ゲームという．表 3.10 に各プレイヤーの戦略が C と D の 2 種類がある 2×2 対称ゲームの利得表を示す．

表 3.10: 2×2 対称ゲームの一般的記述（再掲）

	C	D
C	$R,\ R$	$S,\ T$
D	$T,\ S$	$P,\ P$

「それぞれの戦略の組み合わせについて自他の区別なく同じ利得が得られる」ということは，例えば自分が C をとり，相手が D をとる場合の利得が，両プレイヤーで等しいということを意味している．つまり，

$$u_1(C, D) = S = u_2(D, C)$$

が成り立つことを意味する．

こうした対称ゲームは，お互いのプレイヤーが，選択可能な戦略，そして利得の点でまったく同質である状況を表している．プレイヤーの同質性は，とくに後述の協力問題や公共性問題などの原理的問題を考察する際には，許容しうる仮定であるし，分析をする上でも大変扱いやすい[15]．

3.8.2 2 つの制限

以下，2×2 対称ゲームの類型を見ていくが，ここで 2 つの制限を課しておく．

(1) 4 種類の戦略の組に対する利得はすべて異なる．このとき 4 種類の利得間で狭義の順序が成立するので，利得の順位は必ず決まる．

(2) $R > P$．ただし，この制限は表現上の簡略化のための制限であって，類型の分析上本質的な制限ではない[16]．

[15] 数学的にいえば，対称 2 人ゲームとはプレイヤー 2 の利得行列がプレイヤー 1 の利得行列の転置行列で表されるゲームである．表 3.10 についていえば，

$$\text{プレイヤー 2 の利得行列} = \begin{pmatrix} R & T \\ S & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}'.$$

[16] たとえば，$R > S > T > P$ となるゲーム 1 と $P > T > S > R$ となるゲーム 2 は戦略のラベル C と D を入れ替えれば，構造的に同一である．このことを確認するために，R, S, T, P をプレイヤー 1 の利得として書くと，ゲーム 1 は

$$u_1(C, C) > u_1(C, D) > u_1(D, C) > u_1(D, D)$$

であり，ゲーム 2 は

$$u_1(D, D) > u_1(D, C) > u_1(C, D) > u_1(C, C)$$

であるが，ゲーム 2 の C と D を入れ替えれば，ゲーム 1 と完全に同一であることが確認できる．このように 24 種類のゲームは，それぞれ構造的に同一の 12 のペアに分けることができる．ここではそのうち，$R > T$ となるものを取り上げて分析するということである．詳しくは石原・金井（2002: 29）参照．

3.8.3　4 類型

さて，2 つの制限を課すと，可能なゲームの種類は 12 種類である[17]．2×2 対称ゲームにおいては，相手の戦略に対する最適反応戦略は，相手が C の場合は R と T の大小関係，そして相手が D の場合には P と S の大小関係で決まる．ゆえに，12 種類のゲームは R と T，P と S の大小関係に応じて 4 つのタイプに分類できる．

Type I 条件 $R > T, P < S$．5 パターン．

(a) $R > T > S > P$
(b) $R > S > T > P$
(c) $R > S > P > T$
(d) $S > R > P > T$
(e) $S > R > T > P$

Type II 条件 $R < T, P > S$．1 パターン．

(a) $T > R > P > S$

Type III 条件 $R > T, P > S$．3 パターン．

(a) $R > T > P > S$
(b) $R > P > S > T$
(c) $R > P > T > S$

Type IV 条件 $R < T, P < S$．3 パターン．

(a) $T > R > S > P$
(b) $T > S > R > P$
(c) $S > T > R > P$

以下，4 つのタイプについて詳しく検討する．

Type I　非ジレンマ状況

条件は $R > T, P < S$ で，この場合 5 パターンのゲームがある．最も典型的なケースとして $R > S > T > P$ のゲームを考える．表 3.11 はこのゲームの数値例である．

このタイプのゲームでは，条件 $R > T, P < S$ より，両プレイヤーにとって C が支配戦略になる．ゆえに，**戦略の組 (C, C) が唯一のナッシュ均衡となる．**また，条件 $R > T, P < S$ と制約 $R > P$ より，**唯一のナッシュ均衡である戦略の組 (C, C) はパレート最適である**．つまり，このタイプのゲームの場合，プレイヤーの合理的選択によって社会的に望ましい結果が実現されるのである．

表 3.11: 非ジレンマ例

	C	D
C	5, 5	3, 1
D	1, 3	0, 0

表 3.12: 囚人のジレンマ例

	C	D
C	3, 3	0, 5
D	5, 0	1, 1

Type II 囚人のジレンマ

条件は $R < T, P > S$ であり，この場合は $T > R > P > S$ の 1 パターンである．

3 章で検討したように，このタイプのゲームでは，条件 $R < T, P > S$ より，両プレイヤーにとって D が支配戦略となる．ゆえに**戦略の組** (C, C) **が唯一のナッシュ均衡となる．** また，制約 $R > P$ より，**唯一のナッシュ均衡である戦略の組** (D, D) **はパレート最適ではない**．囚人のジレンマゲームの場合，プレイヤーの合理的選択によって社会的に望ましくない結果が実現されてしまう．

この囚人のジレンマゲームは，主に社会学の文脈において，**社会秩序形成問題**を表現するものとして取り扱われてきた．この問題は**ホッブズ問題**ともいわれる．

17 世紀の思想家トマス・ホッブズは，共通の権力による統制のない「自然状態」においては，人々が自らの欲求にしたがって利己的に行動するために，結果的に「万人の万人に対する闘争」状態が生じると考えた．ホッブズはこの状態を解決するためには，主権国家の創設と国家主権への権利委譲が必要であると考えたが，このホッブズの枠組みに見られる原理的な問いとは，利己的な行為者たちからなる状態からいかにして社会秩序が生成しうるか，というものであった．

囚人のジレンマゲームにおいて，この問題を敷衍すると，利己的な行為者の行動によって引き起こされる (D, D) という相互裏切り（defection）＝無秩序状態から，いかにして (C, C) という相互協力（cooperation）＝秩序状態へと移行しうるか，と言い直すことができる．

この定式化をもとにして，これまで様々な考察が加えられてきた．しかし，利得構造を変更しない限り，プレイヤーの合理性を仮定する以上，1 回だけのゲームでは支配戦略解は (D, D) 以外にはあり得ない．だが，永続的に存続する関係性を仮定した場合は，ある種の協力関係，つまり秩序状態が生じうるということが，無限繰り返しゲームという枠組みにおいて示すことができる．無限繰り返しゲームについては次節で紹介する．

Type III 調整ゲーム

条件は $R > T, P > S$ で，この場合 3 パターンのゲームがある．典型的な例として $R > T > P > S$ を取り上げる．表 3.13 はこのゲームの数値例である．

[17] R, S, T, P の順列の数は $4! = 24$ であり，そのうち $R > T$ を満たすのは半分の 12 種類である．

表 3.13: 調整ゲーム例

	C	D
C	5, 5	0, 3
D	3, 0	1, 1

このタイプのゲームでは，$R > T$ より (C, C) が，そして $P > S$ より (D, D) がナッシュ均衡となる．また，条件 $R > P$ より (C, C) はパレート最適であり，(D, D) はパレート最適ではない．まとめると，このタイプのゲームには**パレート最適なナッシュ均衡** (C, C) **と，パレート最適でないナッシュ均衡** (D, D) **の 2 つのナッシュ均衡が存在する**.

ここでの問題は均衡が複数あり，そのなかでどの均衡が実際に実現するかは，ゲームの枠組みからは分からないということである．とくに，いかにしてパレート最適である方のナッシュ均衡が実現するかが問題となる．こうした問題を**複数均衡選択問題**という．逆にいえば，この種のゲームではパレート最適でないナッシュ均衡が成立する可能性も十分にある．こうしたゲーム状況は，社会的な慣習の成立，とくに一見非効率的な慣習がいかにして成立したか，を考える上で大きなヒントとなると考えられている．あるいはまた，商品規格争いにおいても，しばしば必ずしも機能的に優れていない規格が勝つことがあるが（例えば，QWERTY キーボード配列），こうした現象もパレート最適なナッシュ均衡が必ずしも成立しない調整ゲームとして解釈することができる．

Type IV チキンゲーム

条件は $R < T, P < S$ で，この場合 3 パターンのゲームがある．ここでは典型的な例として $T > R > S > P$ の数値例を表 3.14 に挙げる．

表 3.14: チキンゲーム例

	C	D
C	3, 3	1, 5
D	5, 1	0, 0

ここで，このゲームをゲーム名の由来となったチキンゲームとして解釈しよう．チキンゲームとは要するに根性試しゲームで，2 台の車を両端から向かい合う形で全速力で走らせて，先によけた方が弱虫（チキン）で負けというゲームである．C を「避ける」，D を「突っ込む」とすると，一番よいのは相手が先に避ける場合で 5，次によいのはお互いが避ける場合で，この場合どちらも弱虫とはいわれないので 3，自分が先に避けると弱虫の烙印を押されてしまい 1，最後にお互いが避けずに突っ込むと大事故となり最悪の結果 0 となる．

このタイプのゲームは $R < T, P < S$ という条件より，(C, D) **と** (D, C) **という 2 つのナッシュ均衡が存在し，しかも両方ともパレート最適となる．**つまり，一方が突っ込み，一方が避けるという結果が予測される結果である．ただし，どちらのプレイヤーが避けるかについてはこのゲームの分析からは分からない．ここにも複数均衡選択問題が存在するのである．

このタイプのゲームは，**公共財供給問題**の分析においてしばしば取り上げられる．ここで公共財とは，誰が供給主体であろうと，いったんできあがったら他の人の利用を（原則的に）制限することのできないような財を指す．つまり，道路や橋，堤防などのような公共設備や行政や消防・警察などの公共サービスが典型例である．このような公共財を新たに作り出す，あるいは既存のものを維持する場合，何らかの制限がなければ供給・維持活動には参加せず，公共財だけは利用するという**フリーライダー**（ただ乗り）が出てくる可能性がある．そして，全員がフリーライダーになった場合，結局公共財は供給されないことになる．例えば，町内の清掃を誰が担うかという問題が考えられる．全員が協力して清掃すればよいのだが，清掃に参加しなくても他の人の尽力で町内がきれいになるなら，参加しない方が得である．しかし，全員がそのように考えると，誰も掃除をしなくなり町内は汚くなる．

ここで，C を「公共財供給活動に参加する」，D を「フリーライドする」とすれば，チキンゲームは公共財供給問題を表していると解釈できるのである．

3.9 無限繰り返しゲーム

ここまで，考えてきたゲームは，プレイヤーが同時に手を出す 1 回限りのゲームであった．しかしながら，現実社会のゲーム状況，つまり複数の主体が相互依存状況のもとで意志決定を行う状況を考えると，同様の状況が繰り返し生じることがある．例えば，同一の売り手と買い手が同じような取引を繰り返す場合や，友人や夫婦間の関係などである．

表 3.15: 囚人のジレンマ例（再掲）

	C	D
C	3,　3	0,　5
D	5,　0	1,　1

このことをとくに囚人のジレンマ状況について考えてみよう（表 3.15）．相手と 1 回だけのゲームを行い，そのあとは二度と会わないのであれば，プレイヤーは躊躇なく非協力 D を選択するだろう．しかしながら，その相手との関係がその後も続くとすれば話は変わってくるかもしれない．例えば互いに信頼し会える関係ならば協力関係 (C, C) が続くかもしれない[18]．

そこで，繰り返し続くゲームにおいて，協力関係が成立する可能性を理論的に検討してみよう[19]．

3.9.1 無限繰り返しゲームの定義

ある標準型ゲーム G が際限なく繰り返される状況を考えよう．このとき 2 人のプレイヤーはそれぞれの回のゲームをプレイするにあたって，過去のすべてのゲームの結果を知っているとする．このような繰り返されるゲームをすべてひっくるめて，1 つのゲームと見なすことにする．この

[18]そればかりか現実には，実験状況で囚人のジレンマゲームを被験者同士でプレイさせると，互いに知らないもの同士であっても協力状態が達成されるケースが少なくないことが知られている（ラパポート・チャマー 1983）．

[19]以下の議論をわかりやすく解説したものとして，小林・木村（1997: 4 章）がある．

ゲームを G の**無限繰り返しゲーム**といい G^{∞} で表す[20]．無限繰り返しゲームはまた**スーパーゲーム**とも呼ばれる．元のゲーム G を無限繰り返しゲームの**成分ゲーム**と呼ぶ．

3.9.2 無限繰り返しゲームにおける戦略

無限繰り返しゲームにおけるプレイヤーの戦略とは，過去のゲームの結果にもとづいて毎回のゲームにおける手[21]を決めるような,「行動の予定表」あるいは「行動のプログラム」である．無限繰り返しゲームにおけるプレイヤー i の戦略を一般的に $ss_i \in SS_i$ と表す．このような戦略は原理的には無限に種類がありうる．ここではしばしば分析に取り上げられる代表的な 4 つの戦略を紹介する．

(1) **All C (AC)**：過去のゲームの結果によらず，つねに C を出す．

(2) **All D (AD)**：過去のゲームの結果によらず，つねに D を出す．

(3) **トリガー (Tr)**：一番最初は C を出す．それ以降は相手プレイヤーが C を出す限り C を出す．相手が一度でも D を出せば，その次のゲーム以降はつねに D を出す．

(4) **しっぺ返し (TFT)**：tit for tat とも呼ばれる．一番最初は C を出す．2 回目以降は相手が前回出した手と同じ手を出す．

トリガー戦略は，協力には協力をもって応じるが，一度でも裏切る（つまり非協力に移行する）と以後二度と協力しないという強い対抗手段をもつ戦略である．同様に，しっぺ返し戦略は，協力には協力を裏切りには裏切りをもって対抗する戦略であり，トリガー戦略と同様に裏切りに対する対抗手段を組み込んでいる．ただし，相手が一度裏切っても，相手がふたたび協力するなら協力に戻るという「赦し」を含んでいる分，より緩やかな戦略であると言えよう．まとめると，トリガー戦略，しっぺ返し戦略とも協力行動をベースに，相手の裏切りに対する対抗手段をもつ戦略である．

3.9.3 無限繰り返しゲームにおける利得

無限繰り返しゲームにおける利得は，各々の成分ゲームにおいて得られるであろう利得の総合計であるとする．ただし，**人は将来のことであればあるほど利得を割り引いて評価する**と仮定する．無限繰り返しゲーム G^{∞} の戦略を決めるのは，ゲームがスタートする前の時点であり，その時点でプレイヤーはゲームを繰り返していったときに得られるであろう利得を見積もる．ただし，将来のゲームであればあるほど，そのゲームで得られる利得の現時点での重要性もしくは価値は小さく見積もられると仮定する．この仮定は人間の一般的な認識傾向を表していると見なすことができる[22]．

この傾向を表現するために，**割引因子** δ を導入する．ただし $0 < \delta < 1$ である．そして t 回目のゲームで得る利得についての**割引率**を δ^{t-1} と定義する．戦略の組 (ss_1, ss_2) において，プレイ

[20] ゲームの終了時点がいつになるか不確かな繰り返しゲーム，というのが無限繰り返しゲームの現実的な解釈である．
[21] より精確に言えば，成分ゲーム G における戦略 s_i のことである．
[22] 例えば，今日もらえる 1 万円と 1 年後にもらえる 1 万円のどちらが実質的により大きな価値を持つかを考えてみよ．

ヤー i が t 回目のゲームで得る利得を u_{it} とすると，割引因子 δ をもつプレイヤー i の無限繰り返しゲーム G^∞ における利得は

$$U_i(\delta; ss_1, ss_2) = u_{i1} + \delta u_{i2} + \delta^2 u_{i3} + \delta^3 u_{i4} + \cdots + \delta^{t-1} u_{it} + \cdots$$

によって定義される．

例えば，表 3.15 の無限繰り返しゲームにおいて，両プレイヤーともに All C をとった場合を考えてみる．この場合各ゲームで実現する結果は (C, C) であり両プレイヤーとも，各ゲームにおいて 3 の利得を得る．つまり，$i = 1, 2$ について

$$U_i(\delta; \mathrm{AC}, \mathrm{AC}) = 3 + \delta 3 + \delta^2 3 + \delta^3 3 + \cdots + \delta^{t-1} 3 + \cdots \tag{3.1}$$

であり，例えば $\delta = 0.9$ とすると

$$U_i(0.9; \mathrm{AC}, \mathrm{AC}) = 3 + (0.9)3 + (0.81)3 + (0.729)3 + \cdots$$

となる．ここで式 (3.1) が初項が 3，公比が δ の無限等比数列の和であることに気付けば，公式[23]より

$$U_i(\delta; \mathrm{AC}, \mathrm{AC}) = \frac{3}{1-\delta}$$

と単純な式に変形できる．$\delta = 0.9$ とすると $U_i(0.9; \mathrm{AC}, \mathrm{AC}) = 3/(1-0.9) = 30$ となる．

3.10 無限繰り返し囚人のジレンマゲームの結果の分析

以下，表 3.16 を成分ゲームとしてもつ無限繰り返しゲーム G^∞ の結果を検討する．

3.10.1 4 つの戦略の利得表

ここでは，2 人のプレイヤーがそれぞれ All C，All D，トリガー，しっぺ返しという 4 つの戦略をもっているときの G^∞ の利得表をまとめることにしよう．まずは，戦略の組み合わせごとに得られる利得を計算しよう．

[23]初項 a，公比 δ $(0 < \delta < 1)$ の等比数列の和を

$$S_n = a + a\delta + a\delta^2 + \cdots + a\delta^{n-1}$$

とする．この式の両辺に δ をかけると

$$\delta S_n = a\delta + a\delta^2 + a\delta^3 + \cdots + a\delta^n$$

となる．第 1 式と第 2 式の差をとると $S_n - \delta S_n = a - a\delta^n$ となるので，結局まとめると

$$S_n = \frac{a(1-\delta^n)}{1-\delta}$$

となる．ここで $n \to \infty$，つまり n をだんだんと限りなく大きくしていく場合を考える．すると $0 < \delta < 1$ なので δ^n はだんだんと小さくなり，限りなく 0 に近づく．つまり，$n \to \infty$ のとき，S_n は限りなく $a/(1-\delta)$ に近づく．これを S_n の極限値といい，正確には

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-\delta}$$

と表記する．

表 3.16: 囚人のジレンマの一般的記述（ただし $T > R > P > S$）

	C	D
C	$R,\ R$	$S,\ T$
D	$T,\ S$	$P,\ P$

(1) **All C，トリガー，しっぺ返しの組み合わせの対戦**

トリガーもしっぺ返しも相手が C を出し続ける場合，自分も常に C を出す．ゆえに，All C，トリガー，しっぺ返しの 3 つの戦略（これを ss_i で示す）の組み合わせに対する利得は，両プレイヤーとも

$$U_i(\delta; ss_1, ss_2) = R + \delta R + \delta^2 R + \cdots = \frac{R}{1-\delta}.$$

(2) **All D 同士の対戦**

両プレイヤーについて

$$U_i(\delta; \mathrm{AD}, \mathrm{AD}) = P + \delta P + \delta^2 P + \cdots = \frac{P}{1-\delta}.$$

(3) **All C と All D の対戦**

プレイヤー 1 が All C，プレイヤー 2 が All D をとる場合を示す．

$$U_1(\delta; \mathrm{AC}, \mathrm{AD}) = S + \delta S + \delta^2 S + \cdots = \frac{S}{1-\delta},$$

$$U_2(\delta; \mathrm{AC}, \mathrm{AD}) = T + \delta T + \delta^2 T + \cdots = \frac{T}{1-\delta}.$$

(4) **All D とトリガー，All D としっぺ返しの対戦**

1 回目は All D をとるプレイヤーは D，トリガーもしくはしっぺ返しをとるプレイヤーは C である．2 回目以降は双方とも D をとる．ゆえに，プレイヤー 1 がトリガーもしくはしっぺ返しをとり，プレイヤー 2 が All D をとる場合，利得は

$$U_1(\delta; \mathrm{Tr}, \mathrm{AD}) = U_1(\delta; \mathrm{TFT}, \mathrm{AD}) = S + \delta P + \delta^2 P + \delta^3 P + \cdots = S + \frac{\delta P}{1-\delta},$$

$$U_2(\delta; \mathrm{Tr}, \mathrm{AD}) = U_2(\delta; \mathrm{TFT}, \mathrm{AD}) = T + \delta P + \delta^2 P + \delta^2 P + \cdots = T + \frac{\delta P}{1-\delta}$$

となる．

さて，これらの結果をもとに利得表を構成しよう（表 3.17）．ここで見やすさのためにすべての利得に $1-\delta$ をかけている．この操作によって利得の大小関係が変わることはないので[24]，ナッシュ均衡の分析には影響がない．ただしここで，

$$T_s = (1-\delta)T + \delta P, \quad S_s = (1-\delta)S + \delta P$$

とおく．

[24] $0 < \delta < 1$ であったことに注意.

表 3.17: 繰り返し囚人のジレンマの利得表（ただし $T > R > P > S$）

	All C	All D	トリガー	しっぺ返し
All C	R, R	S, T	R, R	R, R
All D	T, S	P, P	T_s, S_s	T_s, S_s
トリガー	R, R	S_s, T_s	R, R	R, R
しっぺ返し	R, R	S_s, T_s	R, R	R, R

3.10.2 非協力ナッシュ均衡

無限繰り返しゲームにおけるナッシュ均衡は，1 回だけの標準型ゲームにおけるナッシュ均衡とまったく同様に定義できる．すなわち，無限繰り返しゲームの戦略の組において，それぞれのプレイヤーの戦略が互いに他のプレイヤーの戦略の組に対して最適反応戦略となっているとき，その戦略の組は**ナッシュ均衡**である．別の言い方をすれば，あるプレイヤー 1 人だけが戦略を変えても得をしない，ということがすべてのプレイヤーについて成立するとき，その戦略の組はナッシュ均衡である．

さて，表 3.17 を一瞥してすぐにわかることは，**戦略が All C と All D だけの 2 人無限繰り返しゲームは，成分ゲームである囚人のジレンマゲームと利得構造上まったく同一である**ということである．ゆえに戦略が All C と All D だけの 2 人無限繰り返しゲームでは，(All D, All D) が唯一のナッシュ均衡となる[25].

戦略の種類を拡大して，トリガーとしっぺ返しを加えても，**(All D, All D) は δ の値にかかわらずに常にナッシュ均衡となる**．このことを証明しよう．まず，プレイヤー 1 の All C への移行は

$$(1-\delta)U_1(\delta; \mathrm{AD}, \mathrm{AD}) = P > S = (1-\delta)U_1(\delta; \mathrm{AC}, \mathrm{AD})$$

なので利得が減少する．次に，プレイヤー 1 がトリガーもしくはしっぺ返しへの移行すると，

$$(1-\delta)P > (1-\delta)S \iff P > S_s$$

なので，

$$(1-\delta)U_1(\delta; \mathrm{AD},\ \mathrm{AD}) = P > S_s = (1-\delta)U_1(\delta; \mathrm{Tr}, \mathrm{AD}) = (1-\delta)U_1(\delta; \mathrm{TFT}, \mathrm{AD})$$

であり，やはり利得が減少する．プレイヤー 2 についても同様のことが成り立つので，ゆえに (All D, All D) はナッシュ均衡である．

3.10.3 協力状態が実現する可能性

では，やはり繰り返しゲームにおいても相互非協力のパレート最適でない均衡状態しか実現しないのだろうか？　実はこのゲームにおいて (トリガー, トリガー)，(しっぺ返し, しっぺ返し)，(ト

[25] さらに，他の選択肢としてどのような戦略があったとしても (All D, All D) は常にナッシュ均衡となる．というのも，All D と対戦したときすべての回で結果的に D を出す戦略の場合，その戦略に変更しても利得は変化しない．また，少なくとも 1 回 C を出す戦略であれば $T > S$ なので，かならず利得は減少する．

リガー, しっぺ返し), (しっぺ返し, トリガー) がナッシュ均衡になる可能性がある．このことを論証しよう．

表 3.17 より，これら 4 種類の戦略の組がナッシュ均衡であるためには,

$$R \geq T_s$$

が成り立つ必要がある．これを δ についてまとめると,

$$\begin{aligned} R &\geq (1-\delta)T + \delta P \\ \Longleftrightarrow \quad \delta(T-P) &\geq T-R \\ \Longleftrightarrow \quad \delta &\geq \frac{T-R}{T-P} \end{aligned} \tag{3.2}$$

となる．結局，$\delta \geq (T-R)/(T-P)$ **が成立するなら，トリガーとしっぺ返しの組み合わせによる 4 種類の戦略の組はナッシュ均衡となる**．トリガーとしっぺ返しの組み合わせによる戦略の組がナッシュ均衡となりうるということは，結果的に各成分ゲームにおいて協力状態 (C, C) が永続するような均衡状態が実現しうるということに他ならない．そしてこの均衡状態は不等式 (3.2) が成立するならば，必ずパレート最適である．

ここで，イメージを持ちやすくするために実際の数値例を示す．無限繰り返しゲームの成分ゲームが表 3.15 で示されるゲームであったとすると,

$$\delta \geq \frac{5-3}{5-1} = 0.5$$

である．ではこの δ の条件は実質的にはどのような意味をもっているのだろうか？　以下に 2 つの方向からの解釈を示そう．

(1) δ に注目すると，δ が大きく 1 に近ければ近いほど，この条件が満たされる可能性が高くなる．つまり，プレイヤーが無限繰り返しゲームにおいて将来の利得の現在価値を高く評価すればするほど，永続的な協力関係が達成される可能性が高まる．

(2) 不等式の右辺に注目すると，分子部分の $T-R$ は (C, C) の相互協力状態から 1 人だけ裏切りに移行した際の利得の純増分を示している．また，分母部分の $T-P$ は，裏切りに対して相手が対抗手段，つまり D に対して D をとった場合の利得の純減分を示している．つまり，不等式の右辺は「裏切りの誘惑の大きさ」と「裏切りに対する罰の大きさ」の関係を示していると見なすことができる．そして,「裏切りの誘惑の大きさ」よりも「裏切りに対する罰の大きさ」の方が大きければ大きいほど，低い割引率であっても協力関係が達成される可能性が高くなる．

3.11　フォーク定理

このように，1 回限りのゲームでは非均衡状態となり実現されないより望ましい状態が，無限繰り返しゲームにおいてナッシュ均衡として実現される可能性がある，ということはゲーム理論研究においては古くから知られていた．こうした知見を一般的に示したものが，いわゆる「フォーク定

理」である．ここでは，フォーク定理そのものの詳細には触れないが[26]，(トリガー, トリガー) がナッシュ均衡となる一般的条件について証明しておく．さらに，(しっぺ返し, しっぺ返し) がナッシュ均衡となる一般的条件について概観する．

3.11.1 (トリガー, トリガー) がナッシュ均衡となる一般的条件

2×2 囚人のジレンマゲームを成分ゲームとする無限繰り返しゲーム G^{∞} において (トリガー, トリガー) がナッシュ均衡となる一般的条件は

$$\delta \geq \frac{T-R}{T-P} \tag{3.3}$$

である．以下これを証明する．2 人のプレイヤーがトリガー戦略を用いるときのプレイヤーの総利得は

$$U_i(\delta;\mathrm{Tr},\mathrm{Tr}) = R+\delta R+\delta^2 R+\cdots = \frac{R}{1-\delta}$$

である．もしプレイヤー 1 が t 回目（$t=1,2,\ldots$）に行動を D に変更するとしよう．するとプレイヤー 2 はその後 D を出し続けるので，プレイヤー 1 の t 回目以降の利得の総和はもっとも大きくて

$$\delta^{t-1}T+\delta^t P+\delta^{t+1}P+\cdots = \delta^{t-1}\left(T+\frac{\delta P}{1-\delta}\right)$$

である[27]．一方，両方ともにトリガー戦略を採り続ける場合の t 回目以降の利得の総和は，

$$\delta^{t-1}R+\delta^t R+\delta^{t+1}R+\cdots = \delta^{t-1}\left(\frac{R}{1-\delta}\right)$$

である．ゆえに

$$\delta^{t-1}\left(\frac{R}{1-\delta}\right) \geq \delta^{t-1}\left(T+\frac{\delta P}{1-\delta}\right) \tag{3.4}$$

ならば，プレイヤー 1 のすべての可能な無限繰り返しゲームにおける戦略 ss_1 に対して

$$U_1(\delta;\mathrm{Tr},\mathrm{Tr}) \geq U_1(\delta;\mathrm{ss}_1,\mathrm{Tr})$$

が成立する．プレイヤー 2 についてもまったく同様のことが言える．式 (3.4) を変形すると式 (3.3) が得られる．以上で証明された．

3.11.2 (しっぺ返し, しっぺ返し) がナッシュ均衡となる一般的条件

2×2 囚人のジレンマゲームを成分ゲームとする無限繰り返しゲーム G^{∞} において (しっぺ返し, しっぺ返し) がナッシュ均衡となる一般的条件は

$$\delta \geq \max\left(\frac{T-R}{T-P},\frac{T-R}{R-S}\right)$$

[26] フォーク定理とその証明については岡田（1996: 215-7）を参照.

[27] 相手が D を出しているときに，自分が得られる利得は P か S かの 2 種類であって，$P>S$ である．ゆえに利得の総和がもっとも大きくなるのは自らも D を出し続けて $t+1$ 回以降 P を得ることである．

である．ここで $\max(a, b)$ は a, b のうち大きな方をとるという操作を示している．この命題の証明はやや煩雑であるため，ここではフォローしない．詳しくは岡田（1996: 209-13）を参照されたい．

この条件の数値例を示そう．表 3.15 を成分ゲームとする無限繰り返しゲームにおける条件は

$$\delta \geq \max\left(\frac{5-3}{5-1}, \frac{5-3}{3-0}\right) = \max(0.5, 0.6\dot{6}) = 0.6\dot{6}$$

である．この例からも分かるとおり，しっぺ返し同士がナッシュ均衡となる条件は，トリガー同士がナッシュ均衡となる条件に比べて，同等かそれよりも厳しい条件になっているものの，δ が十分に 1 に近ければ (しっぺ返し, しっぺ返し) がナッシュ均衡となる可能性があることを示している．

3.12 アクセルロッドのトーナメント

アメリカの政治学者であるロバート・アクセルロッドは，繰り返し囚人のジレンマゲームを用いて次のようなコンピュータ・シミュレーションを行った．ゲーム理論の専門家を中心として，さまざまな研究者から繰り返し囚人のジレンマゲームの戦略のアイデアを募り，それらの戦略を総当たりで戦わせて，もっとも平均利得が高い戦略を決定した．2 回のトーナメントが実施されたが，2 回とももっとも平均利得が高くなったのは「しっぺ返し」だったのである．

この結果は「しっぺ返し」がさまざまな対戦相手との対戦において，そこそこの結果を得ることができる「たくましい」戦略であることを示しているとアクセルロッドは見ている．しっぺ返しの成功の要因としてアクセルロッドは「自分の方から裏切り始めることはなく，相手の裏切りには即座に報復し，心が広く，相手に対して分かりやすい行動」（アクセルロッド 1998: 55）であることを挙げている．

ここで,「たくましさ」が，ある戦略をもつプレイヤーが生き残って，次の世代にその戦略を伝える可能性の高さを表していると考えてみると，しっぺ返し戦略の強さは相互協力という社会秩序状態が成立する 1 つの道筋を示していると見なすことができるだろう．

参考文献

[1] ロバート・アクセルロッド，1998,『つきあい方の科学』ミネルヴァ書房.

[2] ロバート・ギボンズ，1995,『経済学のためのゲーム理論入門』創文社.

[3] 石原英樹・金井雅之，2002,『進化的意志決定』朝倉書店.

[4] 小林淳一・木村邦博，1997,『数理の発想でみる社会』ナカニシヤ出版.

[5] 岡田章，1996,『ゲーム理論』有斐閣.

[6] ウィリアム・パウンドストーン，1995,『囚人のジレンマ』青土社.

[7] A. ラパポート, A. M. チャマー，1983,『囚人のジレンマ──紛争と協力に関する心理学的研究』啓明社.

第4章　相対的剥奪モデル

4.1　相対的剥奪の発見

トクヴィルの発見

「……フランスにおいて，人民の不満が最高潮に達したのは，紛れもなくもっとも改善の進んだ地域においてであった．このことは，非論理的に映るかもしれないが，歴史にはこのようなパラドックスが満ち満ちている.」（A・ド　トクヴィル『旧体制と大革命』）

スタウファーらの発見　*The American Soldier* (Stouffer et al. 1949)

- 第二次世界大戦中のアメリカ従軍者に対する大規模調査
- 昇進に対する評価（満足／不満）

「相対的に昇進機会の少ない部隊には，昇進機会の大きい部隊よりも昇進機会について好意的に評価する人たちの割合が多い」（Vol. 1: p. 257）

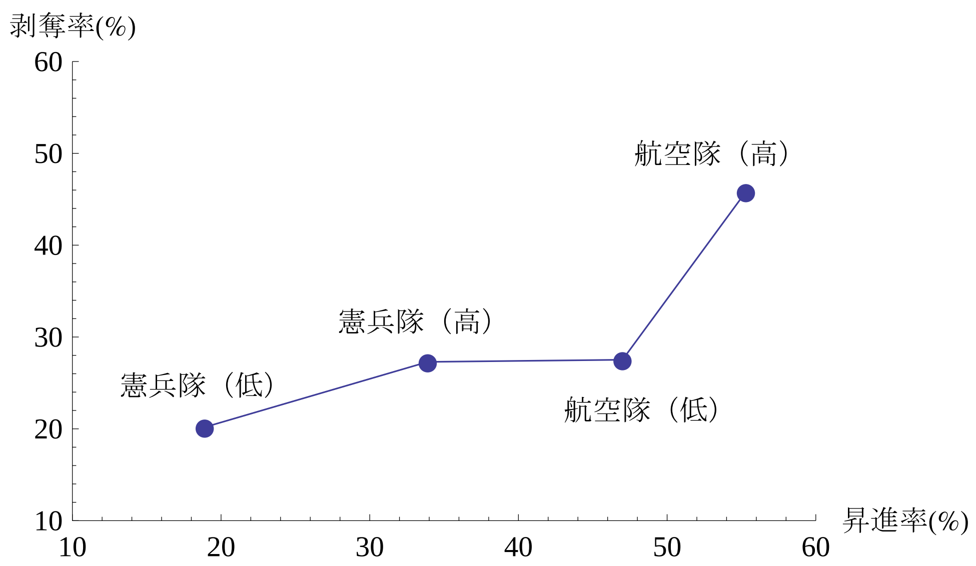


図 4.1: 昇進率と剥奪率の関係 [1]

[1] ここで，剥奪率は「能力のある兵士は軍隊での昇進機会が大きいとあなたは思いますか」に対して,「大きい」,「そこそこ」,「どちらとも」,「あまり／まったくない」と答えたもののうち 「あまり／まったくない」の割合のことである.

4.2　相対的剥奪の概念

R・K・マートン（1961）による *The American Soldier* の知見と概念の整理.

相対的剥奪（relative deprivation）　絶対的基準に基づく不満ではなく，他者との比較に基づく相対的な基準によって生じる不満のこと.

準拠集団（reference group）　比較の対象となる集団のこと.

Runciman (1966), Crosby (1976) による定義

1. A は X をもっておらず,
2. A は自分以外の誰かが X をもっていることを知っており,
3. A は X を欲しており,
4. A は X を得る資格があると感じており，(entitlement)
5. A は X を得ることができると思っていて，(feasibility)
6. A は X を得られないことに責任を感じていない

とき，A は X について相対的に剥奪されているという.

4.3　Boudon-Kosaka モデル

Puzzle　なぜ，客観的な状況が恵まれている集団ほど不満を感じる人が多くなるのか？

$\rightarrow$ Boudon (1982), Kosaka (1986) によるモデル化．本講義ではその簡易版を紹介する.

モデルの公理（Kosaka 1986）

公理 4.1. 集団は N 人のプレーヤーから構成される.

公理 4.2. プレーヤーには *2* つの戦略が与えられる

- 投資戦略：利得 B を得るためにコスト C を投資する.
- 撤退戦略：投資をしない．その結果何も得ない.

ただし，$B > C \geq 0$ を仮定する.

公理 4.3. 投資者数を x（$0 \leq x \leq N$）とし，投資して成功する人数（当たりくじ）を n（$0 \leq n \leq N$）とする．成功するかどうかは当たりくじを各々が引くことによって確率的に決まる．**ここで議論を簡単にするため，本講義では** $x \geq n$ **と限定する．** つまり当たりくじ以上の投資参加者がいる状況を考える.

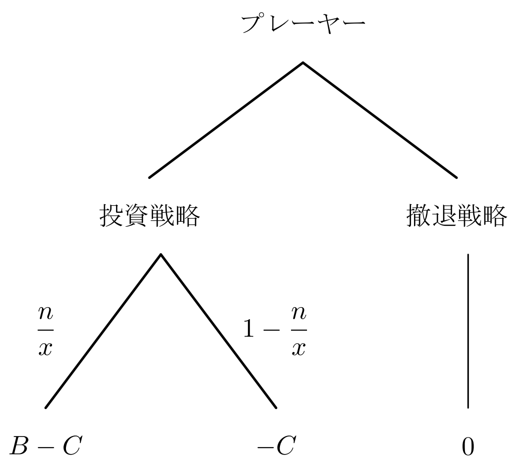


図 4.2: BK モデルの概念図

公理 4.4. プレーヤーは投資戦略をとったときの期待純益と，撤退戦略をとったときの期待純益を比較し，より大きい方の戦略をとる．

ここで，集団における**成功割合**を

$$\gamma = \frac{n}{N}$$

集団における**投資者割合**を

$$p = \frac{x}{N}$$

と定義する．われわれの第一の関心は，**社会において相対的剥奪を感じる人の割合**である．このゲームにおいて，相対的剥奪を感じるのは,「投資して失敗した人」であると考えることができる．なんとなれば，そのプレーヤーは

1. 成功利得 B を得られず,
2. 自分以外の成功者がいることを知っており,
3. 当然，B が欲しかったからわざわざ投資したわけであり,
4. 投資したのだから B を得る資格があると感じており,
5. 確率的に成功者が決まるのであるから，自分もうまくいけば B を得ることができると思っていて,
6. やはり確率的に成功者が決まるのであるから，B を得られないことに責任を感じていない

と考えられるからである．**集団において相対的剥奪を感じる人の割合**は

$$S = p\left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) = p - \gamma \tag{4.1}$$

で与えられる．成功割合 γ と相対的剥奪割合 S との関係がパズルを解くカギである．

4.4　Boudon-Kosaka モデルにおけるナッシュ均衡

Boudon-Kosaka モデルは一種のゲーム状況である．では，公理 4 のプレーヤーの合理性を前提としたときにどのような結果に落ち着くのであろうか．ここでの議論は，Boudon-Kosaka モデルを N 人チキンゲームとして解釈するという武藤（2009）のアイデアを参考にした．

期待純益　集団の中の p の割合のプレーヤーが投資をしているとする．このときある投資プレーヤーの期待純益を $I(p)$ で表す．

$$
\begin{aligned}
I(p) &= (B-C)\frac{\gamma}{p} - C\left(1-\frac{\gamma}{p}\right) \\
&= B\frac{\gamma}{p} - C
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

同様に，p の割合のプレーヤーが投資をしているとき，ある撤退プレーヤーの期待純益を $W(p)$ で表す．

$$
W(p) = 0 \tag{4.3}
$$

撤退中のプレーヤーの意志決定　集団の中の p の割合のプレーヤーが投資をしているとする．このとき，撤退しているプレーヤーにとって

$$
W(p) < I(p+1/N)
$$

が成り立つのであれば，そのプレーヤーは投資に参加しようとする．

$$
\begin{aligned}
W(p) < I(p+1/N) &\iff 0 < B\frac{\gamma}{p+1/N} - C \\
&\iff p < \frac{B}{C}\gamma - \frac{1}{N}
\end{aligned}
$$

であるので，p は $(B/C)\gamma - 1/N$ まで，投資参加者が次々と増えることによって上昇する．

投資中のプレーヤーの意志決定　集団の中の p の割合のプレーヤーが投資をしているとする．このとき，投資しているプレーヤーにとって

$$
W(p-1/N) > I(p)
$$

が成り立つのであれば，そのプレーヤーは投資から降りて撤退しようとする．

$$
\begin{aligned}
W(p-1/N) > I(p) &\iff 0 > B\frac{\gamma}{p} - C \\
&\iff p > \frac{B}{C}\gamma
\end{aligned}
$$

であるので，p は $(B/C)\gamma$ まで，投資参加者が次々と撤退することによって減少する．

ナッシュ均衡　相対的剥奪モデルをゲームと見なしたとき，戦略の組合せは p によって過不足なく表現できる．いま利得関数はすべてのプレーヤーで同じであるので，ある戦略の組合せ p^* がナッシュ均衡であるとは，

$$\begin{aligned} W(p^*) &\geq I(p^*+1/N) \qquad (4.4) \\ I(p^*) &\geq W(p^*-1/N) \qquad (4.5) \end{aligned}$$

が同時に成り立つことである．
　条件 (4.4) より，

$$\begin{aligned} W(p^*) \geq I(p^*+1/N) &\iff 0 \geq B\frac{\gamma}{p^*+1/N} - C \\ &\iff p^* \geq \frac{B}{C}\gamma - \frac{1}{N} \qquad (4.6) \end{aligned}$$

また，条件 (4.5) より，

$$\begin{aligned} I(p^*) \geq W(p^*-1/N) &\iff B\frac{\gamma}{p^*} - C \geq 0 \\ &\iff \frac{B}{C}\gamma \geq p^* \qquad (4.7) \end{aligned}$$

結局，不等式 (4.6), (4.7) より

$$\frac{B}{C}\gamma - \frac{1}{N} \leq p^* \leq \frac{B}{C}\gamma \qquad (4.8)$$

がナッシュ均衡の条件である．
　ところで，$N \to \infty$ のとき

$$\lim_{N\to\infty} p^* = \frac{B}{C}\gamma \qquad (4.9)$$

である．つまり，集団の人数が多くなればなるほど，p^* は $(B/C)\gamma$ に近づく．以下，近似的に $p^* = (B/C)\gamma$ をナッシュ均衡の条件と見なすことにする．ところで，$C/B < \gamma \leq 1$ となるときは，$p^* > 1$ となってしまうが，定義上投資割合 p は 1 以上にはなり得ないので，結局

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{B}{C}\gamma & (0 \leq \gamma \leq C/B) \\ 1 & (C/B < \gamma \leq 1) \end{cases} \qquad (4.10)$$

がナッシュ均衡時の投資者割合である．

4.5　ナッシュ均衡における剥奪割合

　式 (4.10) を，剥奪割合の定義式 (4.1) に代入すると，ナッシュ均衡時における剥奪割合 S^* は，

$$S^* = \begin{cases} \left(\dfrac{B}{C} - 1\right)\gamma & (0 \leq \gamma \leq C/B) \\ 1-\gamma & (C/B < \gamma \leq 1) \end{cases} \qquad (4.11)$$

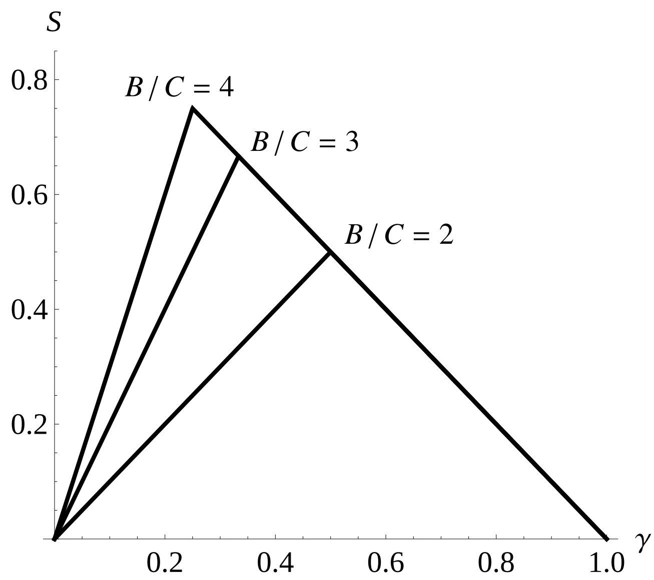


図 4.3: 成功割合 γ に対する剥奪割合 S の挙動

となる．ここで，B/C は「ベネフィット・コスト比」（B/C 比）といわれる「投資のうまみ」を示す指標である．B/C 比が大きければ大きいほど，投資が当たったときの純利益も大きくなる．つまり，より射幸的な投資ということになる．

図 4.3 は，B/C 比を変えたときの成功割合 γ に対する剥奪割合 S の挙動を示している．この結果より以下のようなインプリケーションが得られる．

1. $\gamma < C/B$ のとき，成功割合 γ の上昇に伴い剥奪割合 S は増加する．つまり，客観的に恵まれている集団において逆に剥奪を感じる人が増える，という逆説が表現された．

2. 一方，$\gamma > C/B$ のとき，成功割合 γ の上昇に伴い剥奪割合 S は減少する．高い γ の場合剥奪割合がどうなるかは，*The American Soldier* においては現実には観察されていない．しかし，理論的には減少することを予想している．

3. B/C 比が大きければ大きいほど，剥奪割合 S の飽和点は早くやってくる．また，$\gamma < C/B$ において，B/C 比が大きければ大きいほど，同じ γ に対する剥奪割合は高くなる．これは，「うまい投資話」により多くの人が引き寄せられる結果，失敗者が多くなり結果として剥奪割合が高くなることに対応している．

4.6 Boudon-Kosaka モデル以降

Boudon-Kosaka モデル以降も，応用発展モデルとしていろいろなモデルが提案されている．とくに，浜田（2007）は，Boudon-Kosaka モデルをコアモデルとして，繰り返し投資ゲームによる所得分布の説明モデルや，繰り返し投資ゲームにおける公正評価モデルなどさまざまなモデルを展開している．関心のある人はぜひ一読されたい．

参考文献

[1] Boudon, R. 1982. *The Unintended Consequences of Social Action*. London: The Macmillan Press.

[2] Crosby, F. 1976. “A Model of Egoistical Relative Deprivation.” *Psychological Review* 83(2): 85–113.

[3] 浜田宏，2007,『格差のメカニズム——数理社会学的アプローチ』勁草書房.

[4] 甲田和衛・高坂健次，1989,『社会学研究法』日本放送出版協会.

[5] Kosaka, K. 1986. “A Model of Relative Deprivation.” *Journal of Mathematical Sociology* 12(1): 35–48.

[6] ロバート・K・マートン，1961,『社会理論と社会構造』みすず書房.

[7] 武藤正義，2009,「書評部会　浜田宏著『格差のメカニズム』——ゲーム理論との関係」第 48 回数理社会学会大会（於：北星学園大学）報告資料.

[8] Runciman, W. G. 1966. *Relative Deprivation and Social Justice: A Study of Attitudes to Social Inequality in Twentieth-century England*. London: Routledge & K. Paul.

[9] Stouffer, S. A. et al. 1949. *The American Soldier*. Princeton: Princeton University Press.

第5章　階層イメージ・階層帰属意識生成モデル

5.1　階層意識と階層構造の相互規定

ミクロ・マクロ・リンク

- 社会的位置によって，階層に対する認識・意識は異なる
- その異なり方には一定の傾向性がある
- 階層に対する認識・意識によって人々の（社会的・経済的・政治的）行為・選択が影響を受ける
- 人々の行為・選択の集積によって階層構造が形作られる

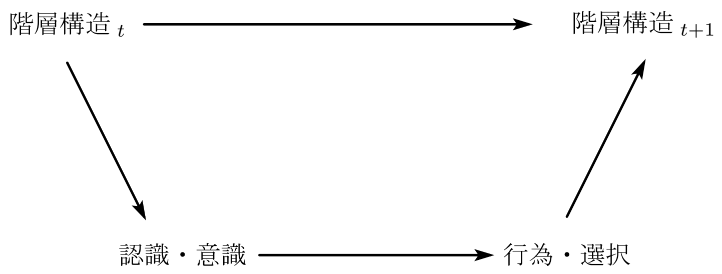


図 5.1: 階層構造のミクロ・マクロ・リンク

5.2　階層イメージの経験的知見

Davis らの *Deep South* (Davis et al. 1941)

人々の持つ階層イメージの特徴（図 5.2 参照）

(1) 階層イメージは，現実の階層を不完全な形で再現する

(2) 他者の所属階層と自己のそれとの社会的距離が遠ければ遠いほど，階層イメージ上の区別はあいまいになっていく

図 5.2: 階層のイメージ（Davis et al. 1941: 65 より）

5.3　階層帰属意識の経験的知見

階層帰属意識　自分自身がどのような階層に所属していると考えているか？　もっとも基本的な階層意識

SSM 調査での質問

かりに現在の日本社会を 5 つに分けるとすれば，あなた自身はこのどれに入ると思いますか？

上　中の上　中の下　下の上　下の下

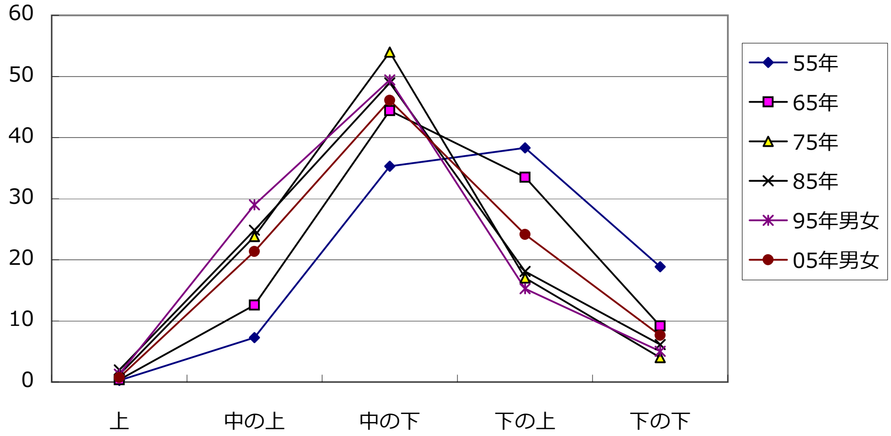


図 5.3: 階層帰属意識分布の推移（SSM 調査より）

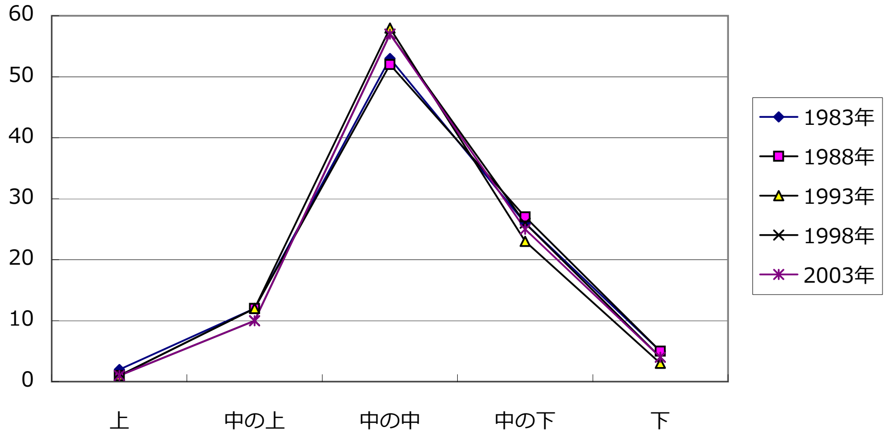


図 5.4: 階層帰属意識分布の推移（国民性調査より）

5.4　Fararo-Kosaka モデル

Puzzle　なぜ遠くの階層ほど階層イメージ上の区別は曖昧になるのか？　そして，なぜどの時代でも一貫した中意識集中現象が起きるのか？

→ FK モデル．Fararo (1980: 12 章)，Kosaka and Fararo (1991), Fararo and Kosaka (2003), 高坂（2006）によるモデル化．

5.4.1　モデルの公理（石田 (2003) によるまとめ版）

公理 5.1. 時間の定義域 T において，行為者の集合 A 上に多次元的階層構造 S が存在する．S には，$C_1, C_2, \cdots, C_s$ という s 個の順序づけられた特性が存在し，さらに各々の C_s の要素は順序づけられているとする．つまり，S における可能な地位の集合はレキシコグラフィカルに順序づけられている．

例えば，$s = 2$ として，$C_1 = \{H, M, L\}$（例えば，職業），$C_2 = \{H, M, L\}$（例えば，学歴）とする．ここで，$H \succ M \succ L$ である．このとき，階層構造 S は上から順に以下のように表される．

HH
HM
HL
MH
MM
ML
LH
LM
LL

$C_1, C_2, \cdots, C_s$ を**次元**とよび，各次元の順序づけられた要素を**ランク**とよぶことにする．以下，**各次元のランク数は同一でかつ 2 以上であると仮定して分析を進める**[1]．次元の数を s，各特性次元におけるランク数を r とし，このとき S を $s \times r$ 客観階層構造と呼ぶ．

各行為者は，T 上の各時点 $t = 0, 1, 2, \cdots$ において，集合 A の他のメンバーと相互作用するものとする．行為者の S に関するイメージは時間の経過とともに変化するが，S そのものは T 上において安定している．$t = 0$ において行為者 α が抱いている S に関する初期イメージは，$Cl(\alpha)$ である．ここで $Cl(\alpha)$ とは S における行為者 α の位置である．

公理 5.2. 行為者 α が他者 β と相互作用を行う場合，次のような手がかり抽出の過程が起こる．

(1) α ははじめに β の C_1 に関する状態を抽出する

(2) α は β の C_2 に関する状態を抽出する……

この抽出過程は β の相対的な位置関係が決まるまで続く．もし α の状態と β の状態が同じである場合には，抽出過程は C_s まで続き,「β は同じ地位」という結論を得る．

[1] この仮定をはずした一般的な分析を行うことも可能である．

公理 5.3. 相互作用が行われた時点で，行為者 α の抱いているイメージは次のようなルールにしたがって修正・変形されてゆく．$Cl(\beta)$ は S のなかの β の位置の抽出部分である．

(1) $Cl(\beta)$ が α の抱いているイメージの中にすでに表現されている場合には，イメージの変化が起こらない．

(2) $Cl(\beta)$ が α の抱いているイメージの中の最高位の階層よりもまだ高いとき，$Cl(\beta)$ が新たにイメージの中での最高位の階層となる．

(3) $Cl(\beta)$ が α の抱いているイメージの中の最下位の階層よりもまだ低いとき，$Cl(\beta)$ が新たにイメージの中での最下位の階層となる．

(4) $Cl(\beta)$ が α の抱いているイメージの中の任意の *2* つの階層間に位置するとき，$Cl(\beta)$ は両者の間に挿入される．

以上が階層イメージ生成のための公理系である．これらの公理が満たされているとき，各々の客観階層に属する他者との遭遇確率が 0 でないならば，任意の行為者の抱く階層イメージは，その行為者の客観階層構造上の地位に応じて一意に定まる．つまり，他者との出会いの中で変容していく階層イメージは，最終的には安定均衡状態に至る．このイメージを**均衡イメージ**と呼ぼう．

公理 5.4. 行為者 α は，自身が持つ均衡イメージにおける自らの所属階層の相対的位置に基づき，階層帰属意識を表明する．

5.5　具体例による FK モデルの分析

以下の分析では，**各客観階層にそれぞれ 1 人の行為者が所属しており，他の階層と必ず相互作用することを仮定する．**

5.5.1　2×2 客観階層構造

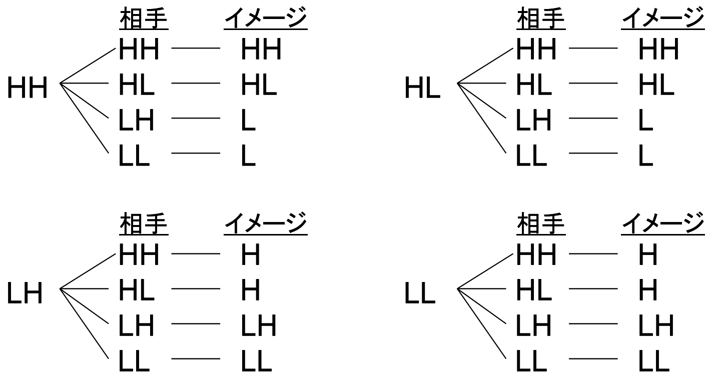


図 5.5: 2 次元 2 ランクにおけるイメージ生成過程

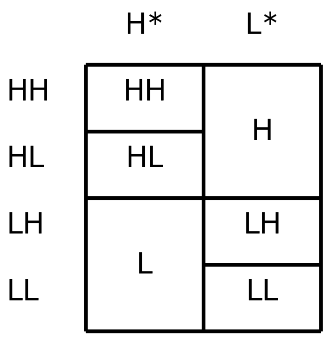


図 5.6: 2 次元 2 ランクにおける均衡イメージ

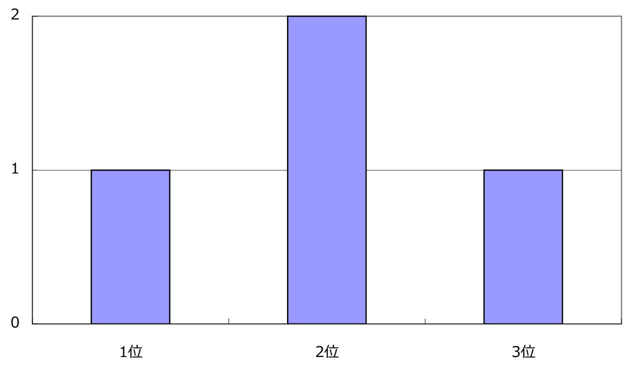


図 5.7: 2 次元 2 ランクにおける階層帰属意識

5.5.2　2×3 客観階層構造

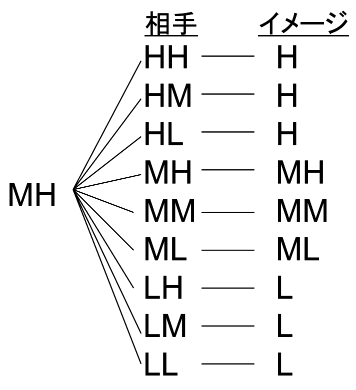


図 5.8: 2 次元 3 ランクにおけるイメージ生成過程（階層 MH）

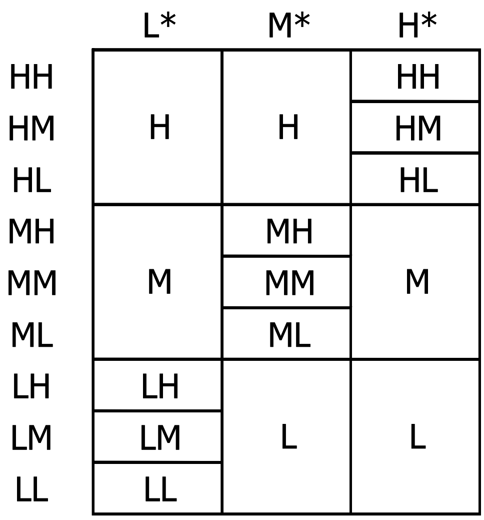


図 5.9: 2 次元 3 ランクにおける均衡イメージ

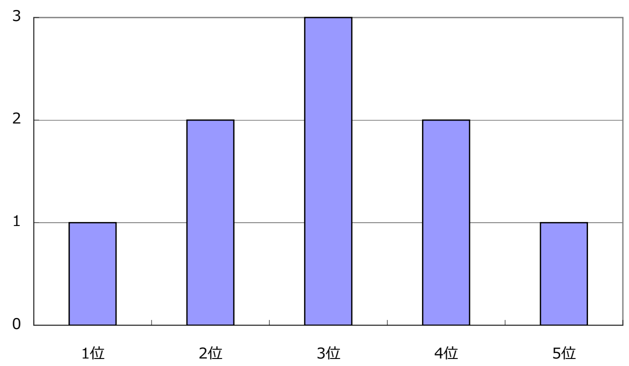


図 5.10: 2 次元 3 ランクにおける階層帰属意識

5.6　一般的な FK モデルの帰結

FK モデルの公理群から得られる一般的な知見については，高坂（2006）において詳細が検討されている．ここでは，階層帰属意識分布についての結論だけをフォローする．

5.6.1　階層イメージの特性

以下，分析を簡単にするために，各次元のランクを上から

$$r-1, r-2, \cdots, 2, 1, 0$$

とラベル付けすることにする．これまで用いていた，H, M, L という表記を置き換えると，$r=3$ の場合

$$H=2, \quad M=1, \quad L=0$$

となる．任意の行為者の客観階層構造上の階層プロフィールを一般的に

$$(k_1, k_2, \cdots, k_s), \quad 0 \leq k_i \leq r-1$$

と表すことにする．

命題 5.1. 任意の行為者のもつ均衡時の階層イメージのランク数 n は,

$$n = s(r-1) + 1 \tag{5.1}$$

で与えられる．

証明. 第 i 次元において，プロフィール $(k_1, k_2, \cdots, k_s)$ をもつ行為者によって，より上位の階層と識別される階層の数は $r-1-k_i$ であり，下位の階層と識別される階層の数は k_i である．ゆえに第 i 次元において識別される階層数は $r-1-k_i+k_i = r-1$ である．このことはすべての次元に当てはまるので，これに s を掛けて，最後に自分自身の所属階層の数を加えると命題を得る． □

階層イメージ上のランクも同様に，上から下に向かって

$$s(r-1), s(r-1)-1, \cdots, 2, 1, 0$$

とラベル付けすることにする．

命題 5.2. 階層プロフィール $(k_1, k_2, \cdots, k_s)$ をもつ行為者のもつ均衡時の階層イメージ上のランク ρ は,

$$\rho = \sum_{i=1}^{s} k_i \tag{5.2}$$

で与えられる．

証明. ランク ρ は，階層イメージ上で自分の所属階層よりも下位とみなされる階層の総数として与えられる．第 i 次元において，下位とイメージされる階層の数は k_i なので，これを次元分だけ足し合わせると命題を得る． □

5.6.2 階層帰属意識分布の特性

各客観階層にそれぞれ 1 人の行為者が所属しているとき，階層帰属意識分布は実際どのようになるだろうか．これはモデルの分析上は階層イメージ上のランク ρ に位置する人が何人いるか，という問題に帰着する．

各次元が 2 ランク まずは，もっとも単純な例として各次元が 2 ランク $C_i = \{1, 0\}$ であるケースを考える．問題は，$k_i \in \{1, 0\}$ のとき,

$$\rho = \sum_{i=1}^{s} k_i$$

となるような階層プロフィール $(k_1, k_2, \cdots, k_s)$ のパターンの数である．この場合，とにかく s 個の次元のうち ρ 個の次元で 1 をとればよいので,「s 個のモノから ρ 個とってくる**組合せ**」の問題であることが分かる．ゆえに，階層イメージ上のランク ρ に位置する行為者の数は

$$\begin{pmatrix} s \\ \rho \end{pmatrix} = {}_sC_\rho = \frac{s!}{\rho!(s-\rho)!} \tag{5.3}$$

で与えられる．

ここで，二項定理より

$$(1+x)^s = \sum_{\rho=0}^{s} \begin{pmatrix} s \\ \rho \end{pmatrix} x^\rho \tag{5.4}$$

であるので，階層イメージ上のランク ρ に属する行為者数は，二項定理における x^ρ の係数に一致する．ところで，$(1+x)^s$ は「パスカルの三角形」の各行の母関数であるので，次元数が大きくなるときの分布の変化はパスカルの三角形の各行を見ればよい．

s	母関数													
0	$(1+x)^0$							1						
1	$(1+x)^1$						1		1					
2	$(1+x)^2$					1		2		1				
3	$(1+x)^3$				1		3		3		1			
4	$(1+x)^4$			1		4		6		4		1		
5	$(1+x)^5$		1		5		10		10		5		1	
6	$(1+x)^6$	1		6		15		20		15		6		1

表 5.1: 次元数 s とパスカルの三角形

各次元が r ランク　先ほどの二項定理を用いた分析からの推論によって，ランクの数が各次元で r のとき x についての単一変数多項式のベキ乗を

$$\left(\sum_{k=0}^{r-1} x^k\right)^s = \sum_{\rho=0}^{s\times(r-1)} f(\rho) x^\rho \tag{5.5}$$

と展開したときの，x^ρ の係数を決める何らかの関数 $f(\rho)$ が，階層イメージ上のランク ρ に属する行為者数を出力する，と予想される．

実際，この予想は正しくて

$$f(\rho) = \sum_{k=0}^{[\rho/r]} (-1)^{k+\rho-rk} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s \\ \rho - rk \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

という関数によって，ランク ρ に属する行為者数を知ることができる．ここで，$[a]$ は a の整数部分を示す．ここでの数学的操作は，確率論における離散的確率分布の「たたみ込み」に対応している（与謝野 1996, 高坂・与謝野 1998）.

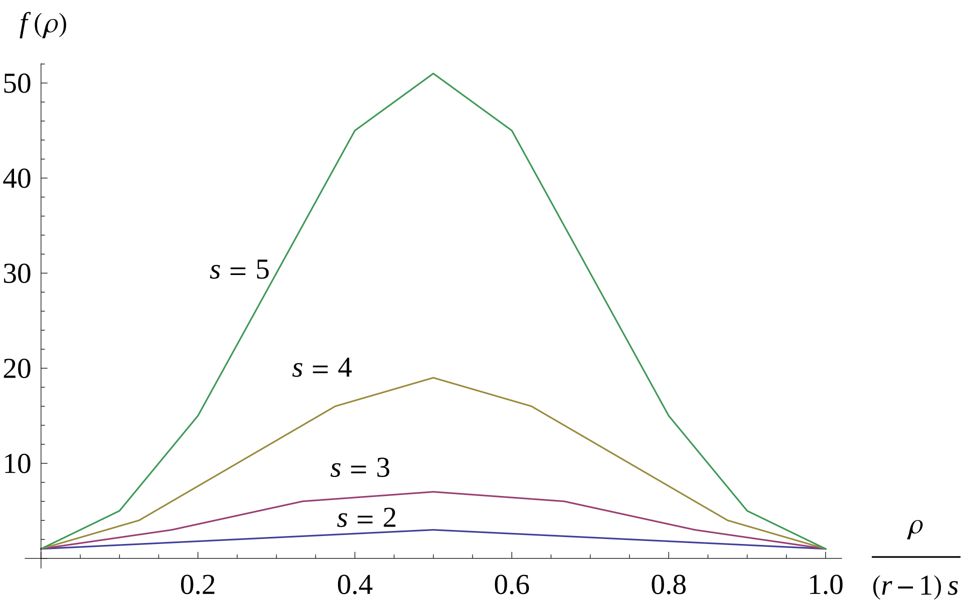


図 5.11: 階層帰属意識分布（ランク $r = 3$ のとき）

図 5.11 より，次元が多くなるほど分布は山形になり，正規分布っぽい感じに近づいていくことが分かる．ここまで各客観階層に 1 人の行為者が配置されている状況を想定してきた．このことは各次元のランクの分布を一様分布と仮定していたことと同じことである．より一般的に，**各次元の分布が同じであればその分布の形を問わず，次元数 s が大きくなれば，階層帰属意識分布は正規分布に近似する**，ということが「中心極限定理」という確率分布論の大定理を用いて言える（与謝野 1996, 高坂・与謝野 1998）．

FK モデルが想定するような各個人のイメージ形成メカニズムを前提とした，各個人の階層帰属意識が集積する結果，強固な中意識集中現象が生じる，というのが FK モデルによるパズルへの解答である．

5.7　補論：式 (5.6) の導出

以下は，数学的には面白いもののややアドバンストな内容なので興味のある受講者だけがフォローすればよい．

各客観階層に 1 人ずつ行為者が存在するとき，階層イメージのランク ρ に属する行為者数は式 (5.6) によって一意に予測できる．この式を導出しよう．

一般に，任意の**無限数列**を

$$\langle a_n \rangle = \langle a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots \rangle$$

と書くことにする．このとき，数列の k 番目の要素と x^k の係数が一対一対応するような関数 $a(x)$ を考える．すなわち，

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

このような関数 $a(x)$ は数列 $\langle a_n \rangle$ の**母関数**と呼ばれる．

もう 1 つ任意の無限数列を

$$\langle b_n \rangle = \langle b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots \rangle$$

とおく．数列 $\langle b_n \rangle$ の母関数は

$$b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

である．

ここで，2 つのから新たな無限数列を作り出す，ある特殊な操作として**たたみ込み**を導入しよう．数列 $\langle a_n \rangle$ と数列 $\langle b_n \rangle$ のたたみ込みを

$$\langle a_n \rangle * \langle b_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right\rangle = \left\langle (a_0 b_0), (a_0 b_1 + a_1 b_0), (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0), \cdots, \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \cdots \right\rangle$$

と定義する．ところで，母関数 $a(x)$ と $b(x)$ の積を取ると，

$$a(x)b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n \tag{5.7}$$

となるので，数列のたたみ込みと，対応する母関数の積をとるという操作は対応していることが分かる．

より一般に，s 種類の無限級数 $\langle a_{1n} \rangle, \langle a_{2n} \rangle, \cdots, \langle a_{sn} \rangle$ のたたみ込みは

$$\langle a_{1n} \rangle * \langle a_{2n} \rangle * \cdots * \langle a_{sn} \rangle = \left\langle \sum_{k_1 + \cdots + k_s = n} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{sk_s} \right\rangle \tag{5.8}$$

と定義される．

第 $r-1$ 要素まで 1 をとり，その後 0 をとり続ける特殊な無限数列 U_{r-1} を導入する．すなわち，

$$\begin{aligned} U_{r-1} &= \langle u_0, u_1, \cdots, u_{r-1}, u_r, \cdots \rangle \\ &= \langle \underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{r\text{ 個}}, 0, 0, \cdots \rangle \end{aligned}$$

ただし，

$$u_k = \begin{cases} 1 & (k \leq r-1) \\ 0 & (k > r-1) \end{cases}$$

である．また，U_{r-1} の母関数を $U_{r-1}(x)$ と記すことにすると，

$$U_{r-1}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} x^k$$

である．例えば，U_1 は $U_1 = \langle 1, 1, 0, 0, \cdots \rangle$ であり，母関数は $(1+x)$ である．

たたみ込みの定義より，U_{r-1} を s 個たたみ込んだときの $\rho(\rho = 0, 1, 2, \cdots)$ 番目の要素は

$$\sum_{k_1 + \cdots + k_s = \rho} u_{k_1} u_{k_2} \cdots u_{k_s} \tag{5.9}$$

となる．少なくとも 1 つでも $k_i > r-1$ となる場合は，項 $u_{k_1}u_{k_2}\cdots u_{k_s}$ がゼロになる．ゆえに，要素数の式 (5.9) は

$$\forall i \in \{1,\cdots,s\},\quad 0 \le k_i \le r-1,\quad \rho = \sum_{i=1}^{s} k_i$$

を満たす $(k_1,\cdots,k_s)$ のパターン数を出力することになる．これは FK モデルにおいて，階層イメージ上のランク ρ に属する行為者数に他ならない．

k	0	1	2	3	4	5	6	7
U_3	1	1	1	0	0	0	0	0
U_3	1	1	1	0	0	0	0	0
U_3	1	1	1	0	0	0	0	0
$U_3 * U_3 * U_3$	1	3	6	7	6	3	1	0

表 5.2: U_3 を 3 個たたみ込んだ結果

ここまでの考察で，各客観階層に 1 人の行為者が属しているときの，s 次元 r ランクの階層イメージ分布は，数列 U_{r-1} の s 個のたたみ込み，すなわち，

$$\underbrace{U_{r-1} * U_{r-1} * \cdots * U_{r-1}}_{s\,\text{個}}$$

によって一意に与えられることが分かった．次に，この数列を明示化することを考えよう．このとき，数列のたたみ込みは母関数の積に対応する，という知見を用いる．数列 U_{r-1} の s 個のたたみ込みに対応するのは，

$$(U_{r-1}(x))^s = \left(\sum_{k=0}^{r-1} x^k\right)^s$$

という母関数である．これをぐりぐり展開して係数式を求めればよい．

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{r-1} x^k\right)^s &= \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{r-1}\right)^s \\
&= \left(\frac{1-x^r}{1-x}\right)^s \qquad (\because \text{初項 } 1\text{，等比 } x \text{ の等比数列の和}) \\
&= (1-x^r)^s(1-x)^{-s} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} (-1)^k x^{rk}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -s \\ j \end{pmatrix} (-1)^j x^j\right) \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

右辺の最後は，左項は（一般化）二項定理から，右項は負の二項定理から導き出される．ここで，

$$a_{ri} = \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} (-1)^k,\quad b_j = \begin{pmatrix} -s \\ j \end{pmatrix} (-1)^j$$

とおく．b_j は負の二項係数とも呼ばれ，

$$b_j = \begin{pmatrix} -s \\ j \end{pmatrix} (-1)^j = \begin{pmatrix} s+j-1 \\ j \end{pmatrix} = {}_sH_j$$

と変形することができる．ここで，${}_sH_j$ は「s 個のものから重複を許して，j 個のものをとる組合せの数」を示す．

さて，式 (5.10) から続けよう．

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{rk} x^{rk}\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)$$

は 2 つの母関数の積の形をしている．式 (5.7) と見比べながら，上式を展開したときの x^ρ の係数がどうなるかを考えよう．x^ρ の係数となるのは $\rho = rk + j$ を満たす $a_{rk}b_j$ であり，これらをすべてのパターン足し合わせればよい．$j = \rho - rk$ かつ，$j \geq 0$ なので，k が動くのは，$0 \leq k \leq [\rho/r]$ の範囲である．ゆえに，x^ρ の係数は

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{[\rho/r]} a_{rk} b_{\rho-rk} &= \sum_{k=0}^{[\rho/r]} (-1)^{k+\rho-rk} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s \\ \rho - rk \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{[\rho/r]} (-1)^{k} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+\rho-rk-1 \\ \rho - rk \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．これでようやく，式 (5.6) が導出できた．母関数としては，

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{rk} x^{rk}\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) &= \sum_{\rho=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{[\rho/r]} a_{rk} b_{\rho-rk}\right) x^\rho \\
&= \sum_{\rho=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{[\rho/r]} (-1)^{k+\rho-rk} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s \\ \rho - rk \end{pmatrix}\right) x^\rho
\end{aligned}$$

となる．

たたみ込みを含む，数列の議論は大変に奥が深い．数学的に興味が湧いてきた人は結城（2007）を一読してみるのもいいだろう.「数学ラノベ」とでも言える読み物であるが，数学のおもしろさを堪能できるだろう．ミルカさん（高校 2 年生）の数学の才能に嫉妬しながら読むのが正しい読み方である．

参考文献

[1] T・J・ファラロ，1980『数理社会学　II』紀伊國屋書店.

[2] Fararo, Thomas J. and Kenji Kosaka, 2003, *Generating Images of Stratification: A Formal Theory*, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

[3] 石田淳，2003,「認識の効率性と階層イメージ——スキャニング打ち切り条件を課した FK モデル」『理論と方法』18(2): 211-28.

[4] 高坂健次，2006,『社会学におけるフォーマル・セオリー——階層イメージに関する FK モデル【改訂版】』ハーベスト社.

[5] Kosaka, Kenji and Thomas J. Fararo, 1991, " Self-location in a Class System: A Formal-Theoretical Analysis, " Pp.29-66 in *Advances in Group Processes Volume 8*, Edited by Edward J. Lawler, Barry Markovsky, Cecilia Ridgeway and Henry A. Walker, Greenwich: JAI Press.

[6] 高坂健次・与謝野有紀，1998,「社会学における方法」高坂健次・厚東洋輔（編）『講座社会学 1 理論と方法』東京大学出版会: 199-238.

[7] 与謝野有紀，1996,「階層評価の多様化と階層意識」『理論と方法』11(1): 21-36.

[8] 結城浩，2007,『数学ガール』ソフトバンククリエイティブ.

第6章　親族構造のモデル

6.1　親族構造

親族構造

- 社会的関係と生物学的関係が融合した一種の社会構造（ブラッドリー&ミーク 1992: 57）
- 婚姻関係と親子関係という2つの基本的な関係を制限することで，親族システムを秩序化している．
  - 婚姻規則：男が結婚相手を見つけることのできるクランを定める
  - 出自規則：男の子供が属するクランを定める
  - 一般的なタイプの規定婚システム

6.2　ホワイトのモデル

- 人類学者クロード・レヴィ＝ストロースと数学者アンドレ・ヴェイユによる親族構造の代数学的分析（レヴィ＝ストロース 2000）．フランス語版の初版は1949年.
- ハリソン・ホワイトによるさらに洗練された包括モデル（White 1963）.

6.2.1　ホワイトの公理（ブラッドリー&ミーク 1992: 61; White 1963: 34-5）

規定婚システムの一般的なモデルの公理群.

公理 6.1. 社会の全構成員は，相互に排反的な集団に分割される．そのような集団を，クランと呼ぶ．各人のクランへの所属は，生涯変わることはない．以下では，クランの数を n で表す.

公理 6.2. 規則により，あるクランに属する男はある定められた唯一のクランに属する女の中から妻を見出さなければならない．その規則は，生涯変更されることはない.

公理 6.3. 2つの異なったクランに属する男は，それぞれ異なったクランに属する女と結婚しなければならない.

公理 6.4. ある夫婦の子どもは全員，1つの同じクランに帰属させられる．帰属させられるクランは，夫と妻のクランに応じて一義的に定められている.

公理 6.5. 父親のクランが異なる子どもたちは，異なるクランに属する.

公理 6.6. 男は彼と同じクランに属する女とは，決して結婚できない．

公理 6.7. すべての人は，結婚と出自を通して他のクランに親戚をもっている．つまり社会は，相互につながりのない集団に分裂してはいない．

公理 6.8. 結婚と出自の絆によって結びつけられている 2 人が，同じクランに属するかどうかは，どのクランであっても，かれらの間の関係にのみ依存している．

6.3 ホワイトの公理の行列による表現

6.3.1 公理 1–5 による表現規則

公理 6.1 より，社会は n 個のクランによって構成される．それぞれのクランを n 次元の単位（行）ベクトル $\mathbf{e}^i$ で表すことにする．また，クランの集合を S とする．このとき $|S| = n$ である．例えば，社会が 4 つのクランからなる場合，それぞれのクランは以下のように表される．

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= (1,0,0,0) \quad \mathbf{e}^2 = (0,1,0,0) \\ \mathbf{e}^3 &= (0,0,1,0) \quad \mathbf{e}^4 = (0,0,0,1) \end{aligned}$$

公理 6.2, 6.3 より，あるクランの男の結婚相手のクランを 1 対 1 対応で定める対応規則が存在する．これを n 行 n 列の順列行列 W で表す．順列行列とは,「各行・各列にそれぞれ 1 を 1 個だけ含み，他の残りの要素がすべて 0 となる行列である．例えば,

$$W = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

である．このような W を定めることによって，任意の $\alpha \in S$ に属する男性の妻の出身クランを知ることができる．このような写像を

$$W(\alpha) = \alpha W \tag{6.1}$$

と定義する．例えば，先の例であれば

$$W(\mathbf{e}^2) = (0,1,0,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0,1) = \mathbf{e}^4$$

となるので，2 番目のクランに属する男性の妻は 4 番目のクランであることが分かる．

同様に，出自規則を順列行列 C によって定める．C によって，任意の $\alpha \in S$ に属する男性の子の所属クランを知ることができる．このような写像を

$$C(\alpha) = \alpha C \tag{6.2}$$

と定義する．順序行列 W, C を右側から掛け合わせることによって（写像を合成することによって），さまざまな親族関係の対応規則を表現することができる[1]．例えば，

$$CCW = C^2W$$

は，ある男性の孫の結婚相手のクランを示す対応規則となる．また，対応規則の逆行列を考えることで，関係を逆にたどることもできる．ここで，単位行列，逆行列をきちんと導入しておこう．

単位行列とは対角成分 ii がすべて 1 であり，それ以外が 0 となるような正方行列のことである．これを I で表す，つまり，

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & 1 \end{pmatrix}.$$

ある正方行列 A の逆行列は

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

を満たすような正方行列 A^{-1} として定義される．順列行列の場合，行列 A の行と列を入れ替えた転置行列 ${}^tA$ が上記の定義を満たす逆行列となる．このことは行列の積の定義から直ちに言えるので，興味ある受講者は自ら確認して欲しい．ゆえに，

$$W^{-1} = {}^tW, \quad C^{-1} = {}^tC.$$

ここで，W^{-1} は妻から見た夫の所属クランを定めるものであり，C^{-1} は子から見た父親のクランを指し示す規則となる．例えば，

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

こうして，W と C，W^{-1} と C^{-1} の任意の積によって，さまざまな親族関係を表すことができる．一般的に，W, C から生成される順列行列を

$$M = M(W, C)$$

と表す．具体的には，先の C^2W や $C^{-1}WC$ などである．

6.3.2　公理 6–8 による制約

公理 6.6–6.8 を数学的に言い直すと以下のようになる（ファラロ 1980: 207–8）．

[1] n 行 n 列の正方行列の積は一般に，

$$AB = (a_{ij})(b_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right)$$

と定義される．ここで，行列を ij 要素で代表させる表し方をしている．一般に AB と BA は等しいとは限らない．つまり，行列の積は「可換」ではない．

公理 6.6'

$$\forall \alpha \in S, \quad W(\alpha) \neq \alpha \tag{6.3}$$

公理 6.7'

$$\forall \alpha, \beta \in S, \quad \exists M(W, C) \;\; s.t. \;\; M(\alpha) = \beta \tag{6.4}$$

公理 6.8'

$$\exists \alpha \in S, \quad M(\alpha) = \alpha \Longrightarrow M = I \tag{6.5}$$

ただし，$M = W$ となる M を除く．

公理 6.6 より，

$$W \neq I \tag{6.6}$$

が直ちに導かれる．公理 6.7 と 6.8 より，以下の命題が成立する（White 1963: 35–9）．

命題 6.1. W と C から生成される親族関係を示す順列行列 M について，行列として形式的に異なるタイプはちょうど n 個存在する．

証明. 公理 6.7 より，あるクラン $\alpha = e^i$ について，自分自身のクランを含む n 個の任意のクラン $\beta = e^j$ との関係が結ばれるためには，つまり $M(\alpha) = \beta$ が成立するためには，少なくとも n 種類の M が必要となる．というのも，M の i 行目には 1 がただ 1 つだけ入っている必要があるから，j 列目のそれぞれに 1 を入れるためには，すくなくとも n 種類が必要になる．

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \cdots & j & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} \vdots \\ i \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} & & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

こうして得られる n 種類の順列行列の集合を

$$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$$

と表すことにする．

次に，ある ij 要素が 1 となる別の種類の順列行列 A_{n+1} が存在するとしよう．このとき，A の中に i 行目が等しくなるような A_k $(1 \leq k \leq n)$ が存在する．このとき，A_k と A_{n+1} は i 行目が等しいので，$A_k(A_{n+1})^{-1}$ の ii 要素は 1 となる．つまり，

$$A_k(A_{n+1})^{-1}(\mathbf{e}^i) = \mathbf{e}^i.$$

ゆえに，公理 6.8 より，

$$A_k(A_{n+1})^{-1} = I \Longleftrightarrow A_k = A_{n+1}$$

となるので，M のタイプはちょうど n 個となる． □

命題 6.2. n 種類の親族関係の集合

$$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$$

の中に，単位行列 I は必ず存在する．

証明. A の中に，ある ii 要素が 1 となる順列行列が存在する．このとき，この順列行列は公理 6.8 より，I でなければならない． □

命題 6.3. n 種類の親族関係の集合 A に属する任意の A_k について，A_k の逆行列が A の中に必ず存在する．すなわち，

$$\forall A_k \in A, \exists (A_k)^{-1} \in A.$$

証明. 一般に，ij 要素が 1 であるような $A_k \in A$ に対して，ji 要素が 1 であるような $A_l \in A$ が存在する．このとき，$A_k = A_l$ でもよい．

さて，このとき $A_k A_l$ の ii 要素，そして $A_l A_k$ の jj 要素は 1 となる．ゆえに，公理 6.8 より，

$$A_k A_l = A_l A_k = I$$

となるので，$A_l \in A$ は $A_k \in A$ の逆行列である． □

6.4　群としての親族関係

集合 A はあるクランにあるクランを親族関係として割り当てる規則（行列）の集合である．これは単なる集合ではなく，行列の積の演算を通して構造を持つ集合なのである．一般に，ある演算規則を通して構造を持つような集合を**群（group）**という．

定義 5. 集合 G が次の条件を満たすとき，**群**という．

(1) G の任意の 2 つの元 a, b に対して，何らかの演算 ab が定義されており，ab はまた G の元となる．このとき，G **はこの演算に関して閉じている**という．つまり，

$$\forall a, b \in G, \quad ab \in G.$$

(2) **結合法則**

$$\forall a, b, c \in G, \quad a(bc) = (ab)c$$

(3) **単位元**と呼ばれる元 $e \in G$ があって，

$$\forall a \in G, \quad ae = ea = a.$$

(4) 任意の $a \in G$ に対して，**逆元** $a^{-1} \in G$ が存在して，

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

たとえば，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は加法 $+$ によって群となる．また，0 を除く有理数全体の集合は乗法 $\times$ によって群をなす.

さて，集合 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ について以下の命題が成立する.

命題 6.4. n 種類の親族関係の集合 A は行列の積に関して，群を形成する.

証明. 命題 6.1 より，任意の M は集合 A のいずれかの要素になるのであった．ゆえに，A に属する任意の 2 つの行列の積は，やはり集合 A に属する．結合法則は行列の積の性質から直接言える．命題 6.2 より $I \in A$ であるので，単位元の存在が言える．最後に，命題 6.3 より逆元の存在も言えるので，結局命題が成立する. □

公理 6.1–6.8 を満たすような親族関係の規則は，数学的にもきちんとした構造（群構造）を持つということが言える.

6.5 （第 1）いとこ婚

公理 6.1–6.8 を満たすような親族関係において，どのような「いとこ婚」が許容され，反対に禁忌されるのか．これはインセスト・タブーの問題とも密接に関連する興味深い問題である.

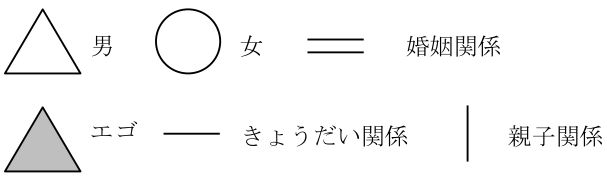


図 6.1: 家系図の記号

6.5.1 父方平行イトコ婚

父の兄弟の娘との結婚.

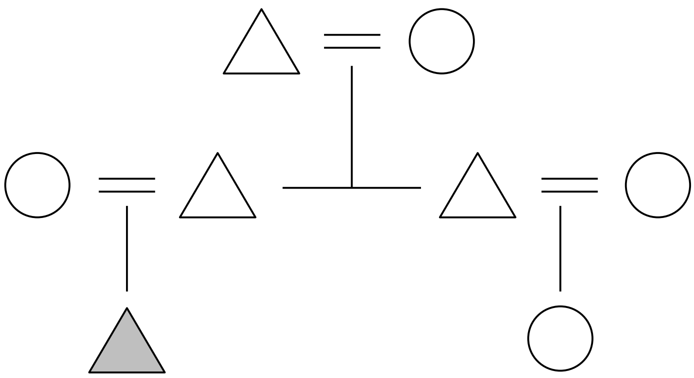


図 6.2: 父方平行イトコ婚

エゴから見た父のクランは C^{-1}，父の兄弟は父と同じクランであり，その子は $C^{-1}C$ によってエゴと関係づけられるクランに属する．ゆえに，

$$C^{-1}C = I = W \tag{6.7}$$

が成立するとき，父方平行イトコ婚は許容される．しかしながら，公理 6.6 より，$W \neq I$ でなければならないので，公理 6.1–6.8 を満たす規定婚システムにおいては，**父方平行イトコ婚は禁止される**.

6.5.2　母方平行イトコ婚

母の姉妹の娘との結婚.

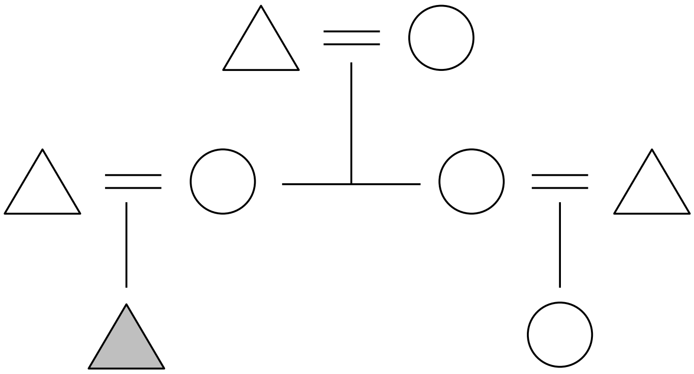


図 6.3: 母方平行イトコ婚

エゴから見た母の出身クランは $C^{-1}W$ であり，母の姉妹は母と同じ出身クランであり，母の姉妹の夫は $C^{-1}WW^{-1}$ となるので，結局母の姉妹の娘は，$C^{-1}WW^{-1}C$ によってエゴと関係づけられるクランに属する．ゆえに，

$$C^{-1}WW^{-1}C = I = W \tag{6.8}$$

が成立するとき，母方平行イトコ婚は許容されるが，公理 6.6 よりこれは許容されない．ゆえに，公理 6.1–6.8 を満たす規定婚システムにおいては，**母方平行イトコ婚は禁止される**.

6.5.3　母方交差イトコ婚

母親の男きょうだい（兄もしくは弟）の娘との結婚.

エゴから見た母の出身クランは $C^{-1}W$ であり，そのクランに属する父親の子どもは $C^{-1}WC$ に属さなければならない．ゆえに，

$$C^{-1}WC = W \Longleftrightarrow WC = CW \tag{6.9}$$

が成立するとき，母方交差イトコ婚は許容される.

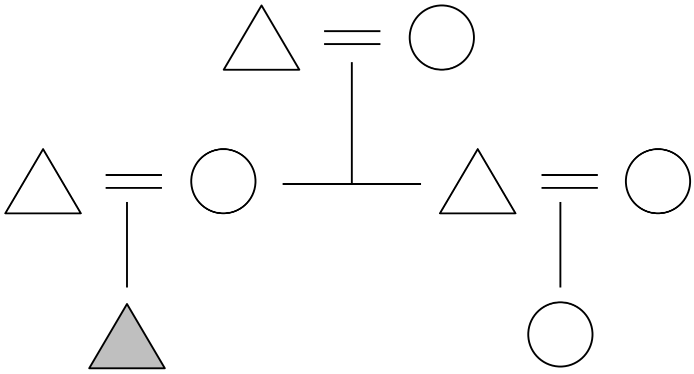


図 6.4: 母方交差イトコ婚

6.5.4 父方交差イトコ婚

父親の女きょうだい（姉もしくは妹）の娘との結婚.

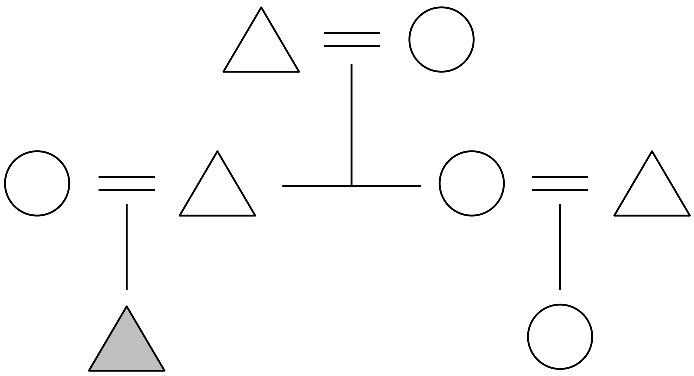


図 6.5: 父方交差イトコ婚

エゴから見た父方の叔母の現在のクランは，叔母の夫のクランであるので $C^{-1}W^{-1}$ であり，そのクランに属する父親の子どもは $C^{-1}W^{-1}C$ に属さなければならない．ゆえに,

$$C^{-1}W^{-1}C = W \iff W^{-1}C = CW \tag{6.10}$$

が成立するとき，父方交差イトコ婚は許容される.

6.5.5 双系交差イトコ婚の必要条件

母方交差イトコ婚と父方交差イトコ婚の両方（双系交差イトコ婚）が許容されている社会を考える．このとき，式 (6.9)，(6.10) より,

$$\begin{aligned} WC = CW \text{ かつ } W^{-1}C = CW \quad &\Longrightarrow \quad WC = W^{-1}C \\ &\iff \quad W^2 = I \end{aligned} \tag{6.11}$$

となる．$W^2 = I$ となるような W は社会において，2 つのクラン同士がペアになって妻を交換しあう婚姻規則に他ならない．そして，$W^2 = I$ となるような W の存在が，双系交差イトコ婚の必要条件となっているのである（必要十分条件ではないことに注意）．

6.5.6 許容されるイトコ婚の種類による社会の分類

White(1963: 42) は，許容されるイトコ婚の種類によって社会類型を行っている．

I 双系婚： $W^2 = I$ かつ $WC = CW$.

II 母系婚： $W^2 \neq I$ かつ $WC = CW$.

III 父系婚： $W^2 \neq I$ かつ $W^{-1}C = CW$.

IV 対になったクラン： $W^2 = I$ かつ $WC \neq CW$.

V その他： $W^2 \neq I$ かつ $WC \neq CW$ かつ $W^{-1}C \neq CW$.

6.6 具体例

山下（2006: 58–71）を参考に，レヴィ＝ストロースとアンドレ・ヴェイユの分析においても取り上げられたオーストラリアの 2 つの部族を具体例として検討しよう．

6.6.1 カリエラ族

$$W = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad C = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

このとき，

$$W^2 = C^2 = I$$

$$V = WC = CW = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので，この規定婚システムにおける親族関係のタイプは

$$\{I(= W^2 = C^2), W, C, V(= WC = CW)\}$$

の 4 種類である．

	I	W	C	V
I	I	W	C	V
W	W	I	V	C
C	C	V	I	W
V	V	C	W	I

表 6.1: カリエラ族における親族関係群の演算表

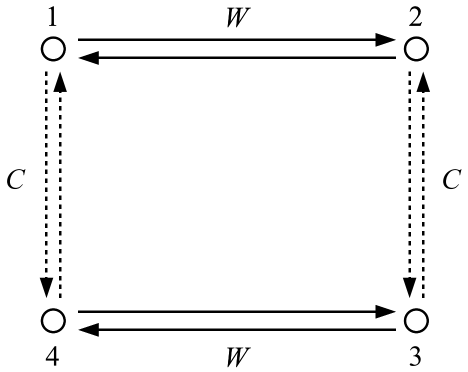


図 6.6: カリエラ族の規定婚システム

$$W^2 = I \quad \text{かつ} \quad WC = CW$$

が成立するので，この社会は「I 双系婚」である．また，この群構造は「クラインの 4 元群」と同型である．

6.6.2 タラウ族

$$W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad C = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

このとき，

$$W^4 = C = I$$

が成立する．この規定婚システムにおける親族関係のタイプは

$$\{I(= W^4 = C), W, W^2, W^3\}$$

の 4 種類である．

	I	W	W^2	W^3
I	I	W	W^2	W^3
W	W	W^2	W^3	I
W^2	W^2	W^3	I	W
W^3	W^3	I	W	W^2

表 6.2: タラウ族における親族関係群の演算表

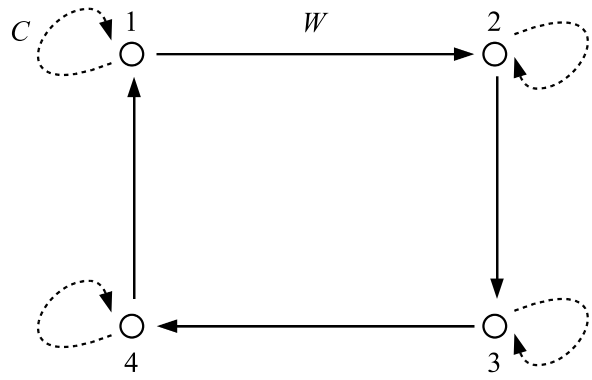


図 6.7: タラウ族の規定婚システム

$$W^2 \neq I \quad \text{かつ} \quad WC = CW$$

が成立するので，この社会は「II 母系婚」である．また，この群構造は「位相 4 の巡回群」と同型である．

6.6.3 その他の例

このように，W と C が与えられれば，それがどのような規定婚システムなのを分析することが可能になる．ブラッドリー&ミークの練習問題（1999: 77–8）をやってみよう．

参考文献

[1] イアン・ブラッドリー, ロナルド・L・ミーク，1999,『社会のなかの数理——行列とベクトル入門』九州大学出版会.

[2] T・J・ファラロ，1980『数理社会学　II』紀伊國屋書店.

[3] クロード・レヴィ＝ストロース，2000,『親族の基本構造』青弓社.

[4] 甲田和衛・高坂健次，1989,『社会学研究法』日本放送出版協会.

[5] White, Harrison C., 1963, *An Anatomy of Kinship: Mathematical Models for Structures of Cumulated Roles*, New Jersey: Prentice-Hall.

[6] 山下正男，2006,『思想の中の数学的構造』ちくま学芸文庫.

第 7 章　人種間分離モデル

「数理社会学第 7 章（人種間分離モデル）.pdf」を参照せよ.

第8章　二国間軍拡競争モデル

本章では，L・リチャードソンによる二国間（あるいは二陣営間）の軍備拡張競争のモデルを紹介する．このモデルは数学的には微分方程式モデル—さらに精確に言えば線形微分方程式系モデル—であるが，リチャードソンのモデルを紹介する前に，関連するより単純な微分方程式モデルとして，F・ランチェスターによる戦争モデルを紹介する．モデルの紹介に当たっては，佐藤（1984, 1987）を主に参考にした．佐藤は，これらのモデルのほかにも，さまざまな微分方程式モデルを紹介しながら，微分方程式の数学的側面についても詳細に説明しており大変勉強になる．リチャードソン・モデルの簡便な分析法については高坂（1978）を参考にした．

8.1　戦争モデル (1)　弓矢の戦

8.1.1　微分方程式系の定式化

A 軍と B 軍，2 つの軍による戦争を考える．近代以前の古典的な戦争においては，個々の戦闘員は一騎打ちによって戦っていた．そこで，仮に両軍とも各戦闘員の戦闘能力はすべて等しいとすると，勝敗に影響するのは，戦闘員の数とそれぞれの軍の武器の性能であろう．モデル化に際して以下のノーテーションを導入する．

t	:	戦闘開始後の経過時間．戦闘開始時間を 0 とする．
$x(t)$	:	t 時点における A 軍の戦闘員数．単純に x とも表す．$x \geq 0$.
$y(t)$	:	t 時点における B 軍の戦闘員数．単純に y とも表す．$y \geq 0$.
α	:	A 軍の武器性能.
β	:	B 軍の武器性能.

さらに，t から $t + \Delta t$ まで時間が経過したときの，両軍の戦闘員数 x, y の変化を

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$

によって表す．このとき，自軍の戦闘員数の減少数は，敵軍の武器性能に比例すると考える．すなわち，

$$\Delta x = -\beta \Delta t, \quad \Delta y = -\alpha \Delta t \quad (\alpha, \beta > 0) \tag{8.1}$$

これを両辺 Δt で割ると，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\beta, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\alpha$$

を得る．x, y が時間 t の連続関数で，t について微分可能であるとする．すると，$\Delta t \to 0$ の極限をとると，以下のような**微分方程式系**を得る．

$$\frac{dx}{dt} = -\beta, \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha \quad (\alpha, \beta > 0) \tag{8.2}$$

8.1.2 微分方程式について

ここで，ごくごく簡単に微分方程式一般について，その基本的な考え方を確認しておこう．

微分方程式とは，時間 t を変数とする関数（例えば，$x(t)$）と，その導関数（例えば，dx/dt であるが，さらに高階の導関数を含む方程式もあり得る）とを含む方程式のことである．時間 t を変数とする複数の関数についての微分方程式の組を，**微分方程式系**という．ここでいう「系」は「システム」のことである．微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) \tag{8.3}$$

は，時間 t における $x(t)$ の瞬間的な変化率を表している．ゆえに，$x(t)$ の増減については dx/dt を見ればよい．

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_a} > 0 \ : \ t_a\text{において増加}, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_a} = 0 \ : \ t_a\text{において不変}, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_a} < 0 \ : \ t_a\text{において減少}$$

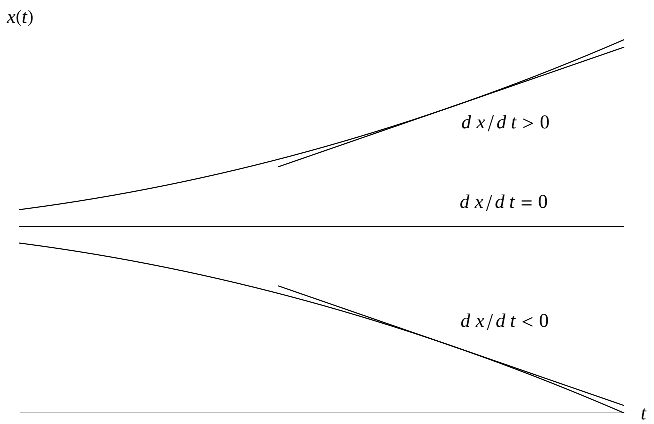


図 8.1: 微分方程式 dx/dt と関数 $x(t)$ の増減の関係

さて，微分方程式 (8.3) をもとに $x(t)$ の式を見出すことを，微分方程式を**解く**といい，その式を微分方程式の**解**（一般解）という．解が見つかれば，時間 t の変動に伴って，$x(t)$ がどのように動くかが明示的に分かる．このとき，特に初期時間を t_0 として，

$$x(t_0) = x_0$$

が成立するとする．これを微分方程式の**初期条件**といい，この初期条件を満たす微分方程式の解の特別な形（特殊解）を見つけることを，**初期値問題**という．

8.1.3　微分方程式系の解

先の微分方程式系 (8.2) の解を求めよう．x についての微分方程式について，両辺を t で積分すると，

$$\int \frac{dx}{dt}dt = -\int \beta dt$$

となる．左辺は置換積分法[1]より，

$$\int dx = -\int \beta dt$$

となるので，結局

$$x(t) = -\beta t + c_1$$

を得る．ここで，c_1 は積分定数である．y についても同様にして解くと，微分方程式系の解として

$$x(t) = -\beta t + c_1, \quad y(t) = -\alpha t + c_2 \tag{8.4}$$

を得る．

さて，ここで初期条件を

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \tag{8.5}$$

とおく．式 (8.4) において，$t = 0$ とおくと $c_1 = x_0$，$c_2 = y_0$ を得る．ゆえに，初期条件を満たす解は

$$x(t) = -\beta t + x_0, \quad y(t) = -\alpha t + y_0 \tag{8.6}$$

となる．この式から直ちに分かるように，それぞれの戦闘員数は時間の経過に伴って線形に減少する．また，初期戦闘員数が少なければそれだけ早く全滅すること，相手の武器性能が高ければそれだけ自軍の減少速度が速いことがわかる（図 8.2）．

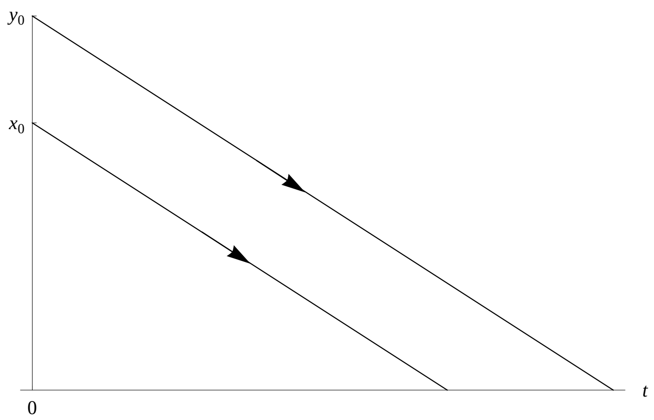


図 8.2: 解 $x(t), y(t)$ のグラフ（$\alpha = \beta$）

[1]
$$\int f(x)dx = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}dt.$$

8.1.4 二軍間の相互作用

先ほどは，x, y それぞれの解を求めたが，この解を用いて時間 t が動いたときの x と y の関係を明示化することができる．

式 (8.6) から t を消去すると，

$$\frac{y_0 - y(t)}{x_0 - x(t)} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{8.7}$$

を得る．ここで，

$$E = \frac{\alpha}{\beta} \tag{8.8}$$

とし，E を交換比と呼ぶ．これは，A 軍と B 軍の武器性能の違いを表す定数である．$E > 1$ のとき A 軍の武器性能の方が優れ，$E < 1$ のとき B 軍の武器性能の方が優れている．$E = 1$ のとき両軍の武器性能はちょうど同じである．式 (8.7), (8.8) をまとめると，

$$y(t) = Ex(t) + y_0 - Ex_0 \tag{8.9}$$

を得る．E がある値に決まっているとき，初期条件 (x_0, y_0) を定めると，その後の時間経過 t に伴う x と y の関係が x-y 平面上の曲線として一意的に定まる．このような曲線を**解軌道**といい，解軌道の描かれる平面を**相平面**という（図 8.3, 8.4, 8.5）．

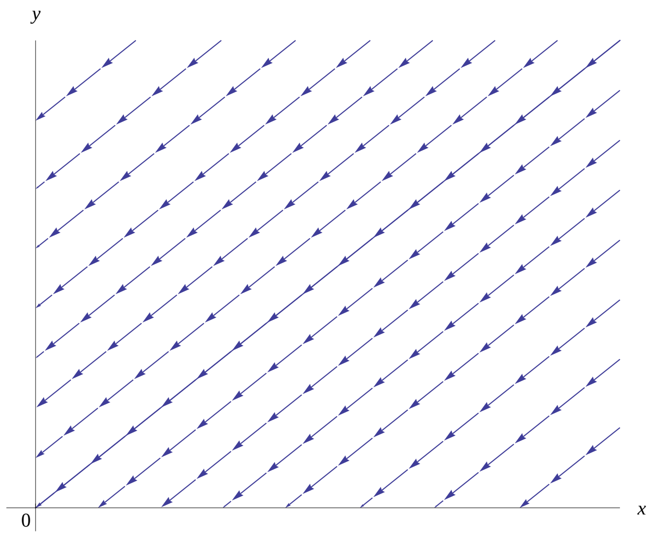


図 8.3: 弓矢の戦いの解軌道（$E = 1$）

8.2 戦争のモデル (2) 近代戦

8.2.1 微分方程式モデルの定式化

弓矢の戦いは大変単純なものであった．一方，軽・重火器を使用する近代戦においては，戦闘は一対一ではなく集団的に行われるので，規模の効果が生まれる．つまり，戦場により多くの戦力

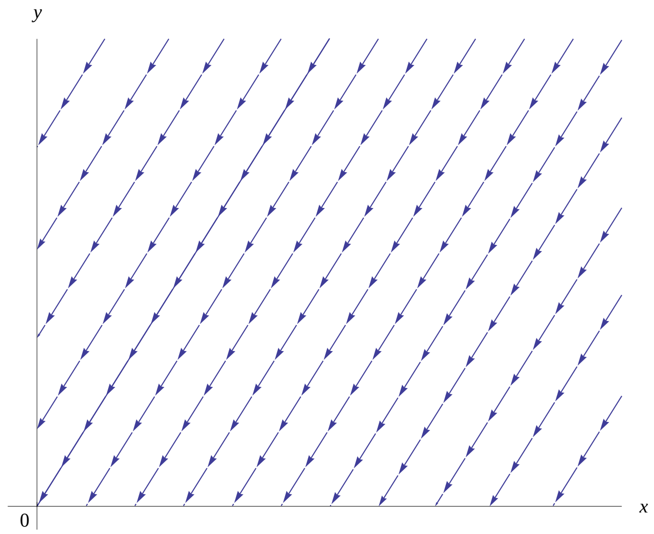


図 8.4: 弓矢の戦いの解軌道（$E = 2$）

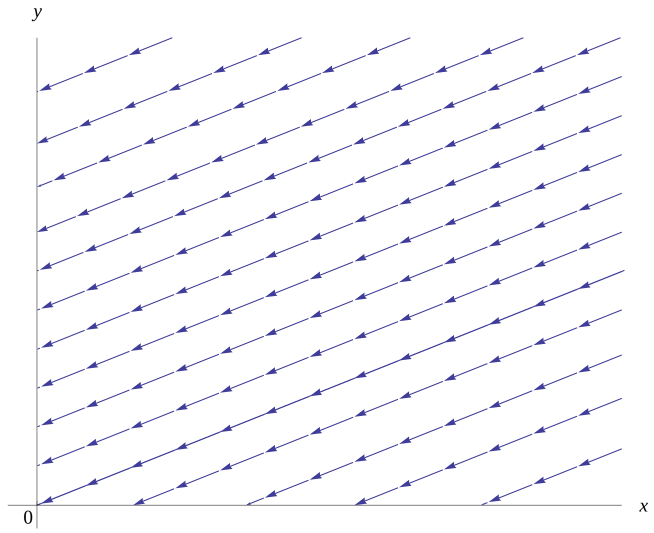


図 8.5: 弓矢の戦いの解軌道（$E = 1/2$）

を集中的に配置した方が有利に戦闘を進めることができる．例えば，近代以前の戦闘では超人的な強さの戦士一人が無双することも可能であったが，近代戦においてはたとえ一騎当千の武将が単身敵陣に乗り込んでも，機関砲の前に蜂の巣にされる．このようなことを念頭に置きつつ，近代戦の微分方程式モデルを定式化しよう．

近代戦においては，自軍の戦闘員数の減少数は，敵軍の武器性能とともに敵軍の戦闘員数に比例すると考える．すなわち，

$$\Delta x = -\beta y \Delta t, \quad \Delta y = -\alpha x \Delta t \quad (\alpha, \beta > 0) \tag{8.10}$$

これを両辺 Δt で割ると，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\beta y, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\alpha x$$

を得る．x, y が時間 t の連続関数で，t について微分可能であるとする．すると，Δt の極限をとると，以下のような**微分方程式系**を得る．

$$\frac{dx}{dt} = -\beta y, \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha x \qquad (\alpha, \beta > 0) \tag{8.11}$$

先の弓矢の戦いと同様に初期条件を，

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \tag{8.12}$$

とおく．この初期値問題に対する微分方程式系の解を求めることができるが，このためには微分方程式に関するやや専門的な知識が必要なため，ここでは解を直接求めず，二軍間の相互作用のみを検討する[2]．

8.2.2　二軍間の相互作用

式 (8.11) を変形して，

$$\alpha 2x\frac{dx}{dt} - \beta 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

を得る．この両辺を t で積分すると

$$\int \alpha 2x\frac{dx}{dt}dt - \int \beta 2y\frac{dy}{dt}dt = 0$$

より，

$$\alpha x^2 - \beta y^2 = c$$

を得る．ここで c は積分定数である．$t = 0$ のとき，$c = \alpha x_0^2 - \beta y_0^2$ なので，結局

$$\frac{y_0^2 - y^2}{x_0^2 - x^2} = \frac{\alpha}{\beta} = E \tag{8.13}$$

となる[3]．式 (8.13) より，

$$y^2 = Ex^2 + y_0^2 - Ex_0^2 \tag{8.14}$$

という x と y の関係式を得る．

解軌道を見ると，近代戦においては初期状態でのわずかな戦力差が，最終的に大きな差となることが見て取れるだろう．

---

[2] 初期条件を満たす解は次の通り：

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\exp\left\{-\sqrt{\alpha\beta}t\right\} + \left(x_0 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\exp\left\{\sqrt{\alpha\beta}t\right\}\right] \\ y(t) &= \frac{1}{2}\left[\left(y_0 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)\exp\left\{-\sqrt{\alpha\beta}t\right\} + \left(y_0 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)\exp\left\{\sqrt{\alpha\beta}t\right\}\right] \end{aligned}$$

[3] 「ランチェスターの二次法則」と言われる．

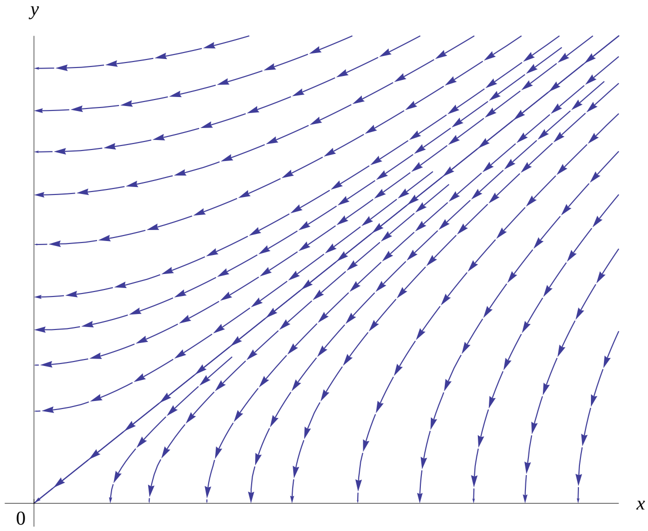


図 8.6: 近代戦の解軌道（$E = 1$）

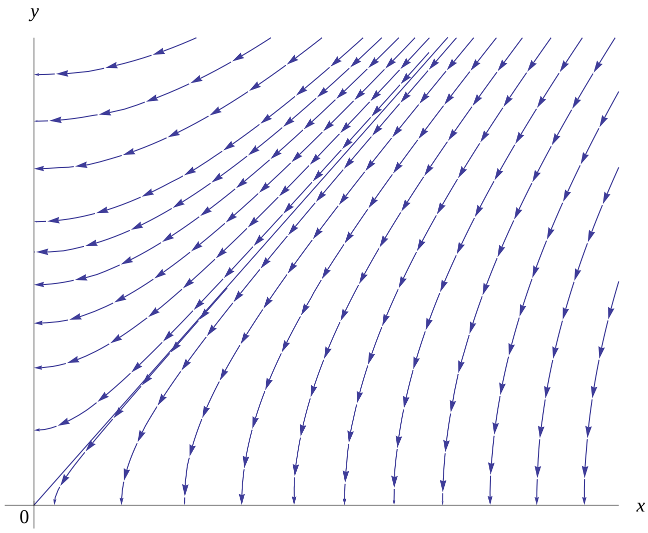


図 8.7: 近代戦の解軌道（$E = 2$）

8.3　二国間軍拡競争モデル

次に，L・リチャードソンによる二国間（あるいは二陣営間）の軍備拡張競争のモデルを紹介する．

8.3.1　微分方程式系の定式化

潜在的に敵対関係にある A 国と B 国を考える．A 国の軍備量を x，B 国の軍備量を y とする．軍備量はマイナスには成り得ないので，$x, y \geq 0$ である．この二国の軍備量の増減は二国間の相互

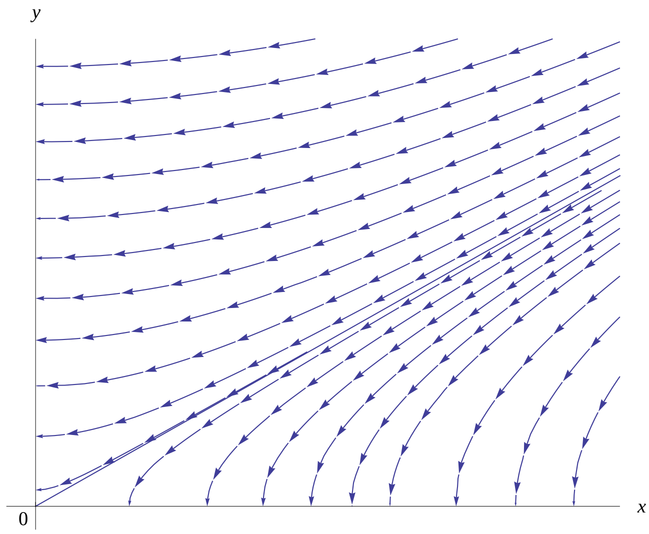


図 8.8: 近代戦の解軌道（$E = 1/2$）

作用によって規定されると考えられる．そこで，以下のような 3 つの仮定をおくことにする．

仮定 1　自国の軍備量の伸びは相手国の軍備量の水準に依存する．相手国の現在の軍備量を見て，その「防衛反応」として軍備の増強を図るという機制を仮定する．これを微分方程式系として表すと

$$\frac{dx}{dt} = ay, \quad \frac{dy}{dt} = bx \quad (a, b > 0) \tag{8.15}$$

となる．a, b を「反応係数」と呼ぶ．

仮定 2　自国の軍備量の伸びは自国の軍備量の水準に制約される．自国の軍備費が多くなればなるほど，国家予算の制約からその変化率にブレーキがかかると考える．これを微分方程式系として表すと

$$\frac{dx}{dt} = -mx, \quad \frac{dy}{dt} = -ny \quad (m, n > 0) \tag{8.16}$$

となる．m, n を「制約係数」と呼ぶ．

仮定 3　自国の軍備量の伸びは相手国に抱いている恒久的な敵対感情・友好感情に依存する．このような感情は，モデルの動く範囲で一定であるとする．これを微分方程式系として表すと

$$\frac{dx}{dt} = g, \quad \frac{dy}{dt} = h \tag{8.17}$$

となる．ただし，g, h は正もしくは負の定数である．

現実の二国間軍拡競争は，これら 3 つの要因が複合的に働く結果起こっていると考えることが

できる．ゆえに，二国間軍拡競争の微分方程式系は

$$\frac{dx}{dt} = ay - mx + g \tag{8.18}$$
$$\frac{dy}{dt} = bx - ny + h \tag{8.19}$$

と表すことができる．ここで，

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

として，この微分方程式系の初期値問題を解くことも可能である．しかしながら，やや専門的な数学的知識が必要なため，以下では系の大まかな挙動を調べる簡易分析を実施して，軍拡競争のタイプとしてどのようなタイプがありうるかを検討する．

8.3.2　解軌道の簡易分析

定常点

まず，**定常点**を見つけよう．定常点とは，相平面上において時間がたっても変化しない点 (x^*, y^*) のことである．つまり，初期値が (x^*, y^*) であった場合，両国の軍備量はビター文とも増えも減りもしない．定常点を見つけるには，式 (8.18), (8.19) をそれぞれ 0 とおいて，連立方程式

$$ay - mx + g = 0$$
$$bx - ny + h = 0$$

を解けばよい．その結果，

$$x^* = \frac{ng + ah}{mn - ab}, \qquad y^* = \frac{bg + mh}{mn - ab}$$

を得る．いま，m, n, a, b はすべて正なので，x^*, y^* の正負は次のパターンとなる．

(1) $mn > ab$ かつ $g > 0, h > 0$ のとき，x^*, y^* は正で，定常点は第 1 象限．

(2) $mn > ab$ かつ $g < 0, h < 0$ のとき，x^*, y^* は負で，定常点は第 3 象限．

(3) $mn < ab$ かつ $g > 0, h > 0$ のとき，x^*, y^* は負で，定常点は第 3 象限．

(4) $mn < ab$ かつ $g < 0, h < 0$ のとき，x^*, y^* は正で，定常点は第 1 象限．

定常点が現実的に意味を持つのは，第 1 象限にあるときである．

x, y の増減

式 (8.18) より，

$$\frac{dx}{dt} > 0 \iff y > \frac{m}{a}x - \frac{g}{a}$$
$$\frac{dx}{dt} = 0 \iff y = \frac{m}{a}x - \frac{g}{a}$$
$$\frac{dx}{dt} < 0 \iff y < \frac{m}{a}x - \frac{g}{a}$$

が成り立つ．このとき，相平面上の直線 $y = (mx + g)/a$（これを L_1 と表記する）よりも上側の領域では x は増加し，下側の領域では x は減少する（図 8.9）．

一方，式 (8.19) より，

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} > 0 &\iff y < \frac{b}{n}x + \frac{h}{n} \\ \frac{dx}{dt} = 0 &\iff y = \frac{b}{n}x + \frac{h}{n} \\ \frac{dx}{dt} < 0 &\iff y > \frac{b}{n}x + \frac{h}{n} \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに，相平面上の直線 $y = (bx + h)/n$（これを L_2 と表記する）よりも上側の領域では y は減少し，下側の領域では y は増加する（図 8.10）．

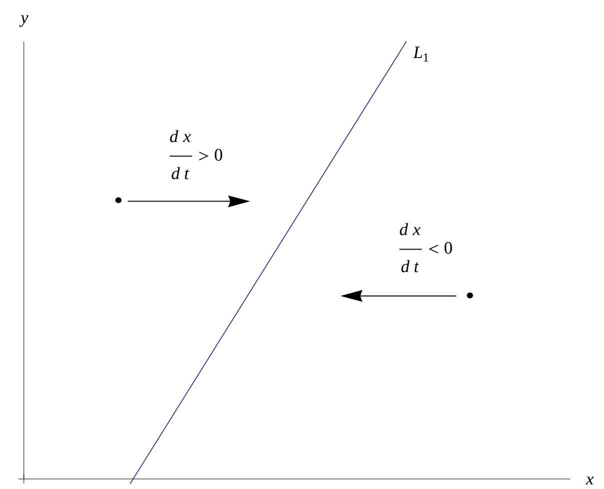


図 8.9: 相平面上の x の増減

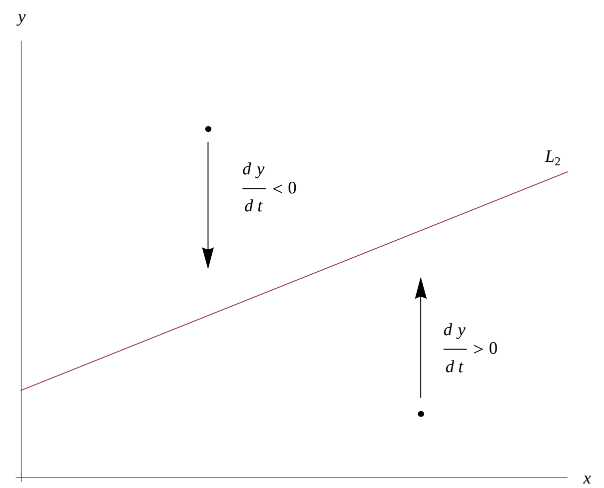


図 8.10: 相平面上の y の増減

いま，

$$mn \neq ab$$

とすると，直線 L_1 と L_2 の傾きは異なるのであるから，その場合 2 つの直線はただ 1 点 (x^*, y^*) で交わる．そして，直線 L_1, L_2 によって相平面は 4 つの領域に切り取られる．このとき，相平面上の (x, y) の挙動のタイプは，大きく $mn > ab$ の場合と $mn < ab$ の場合の 2 つに分けられる[4]．

$mn > ab$ の場合　直線 L_1, L_2 が切り分ける領域ごとに，x 方向の増減と y 方向の増減を組み合わせると，図 8.11 にあるような (x, y) の挙動を得る．

この場合，どのような初期値から初めても，状態は定常点へと限りなく近づいていくことが見て取れる．逆に言えば，もし状態が定常点にあったときに，何らかのエラーによって状態がわずかながらズレたとしても，結局は定常点へと戻っていく動きがみられる．このような定常点を**（漸近）安定定常点**という．

[4] $mn = ab$ の場合も考えることができるが，ここでは取り上げない．関心のある向きは，以下の分析手法で解軌道がどのようになるかを研究してみて欲しい．

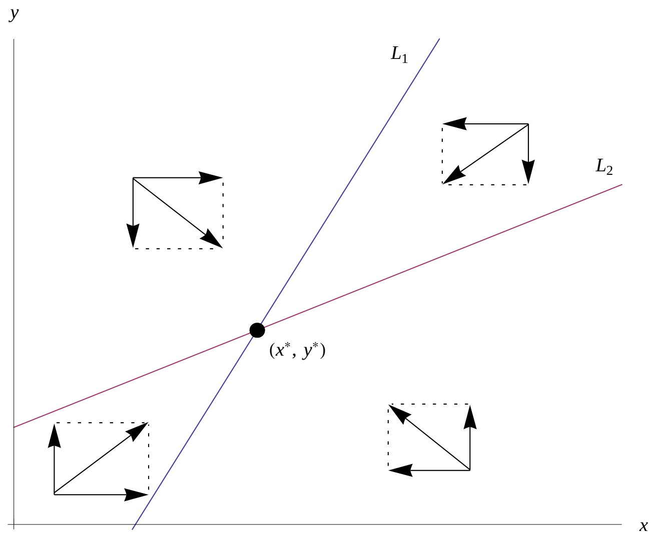


図 8.11: $mn > ab$ の場合の挙動

$mn < ab$ の場合　先と同様に，直線 L_1, L_2 が切り分ける領域ごとに，x 方向の増減と y 方向の増減を組み合わせ，図 8.12 の挙動を得る．

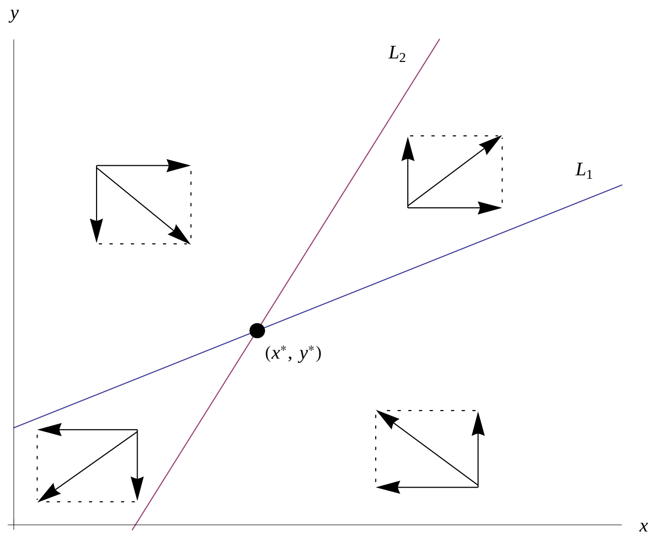


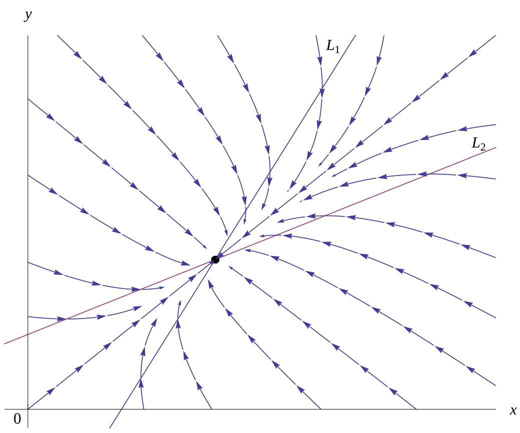
図 8.12: $mn < ab$ の場合の挙動

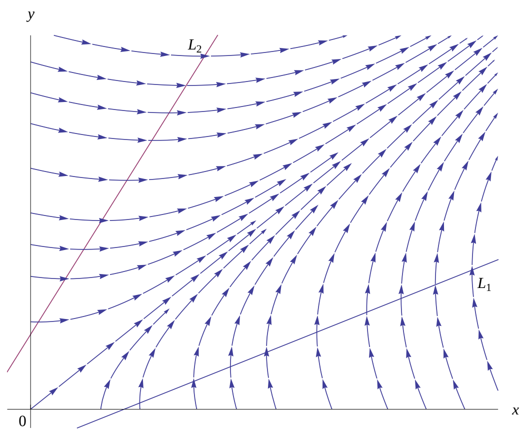
この場合，左上・右下の領域では状態は定常点へと限りなく近づいていくが，右上・左下の領域では逆に定常点から離れていく動きをする．この場合，もし状態が定常点にあったときに，何らかの攪乱要因によって状態がわずかながら右上・左下方向にズレると，状態は定常点からどんどん遠ざかっていく．このような定常点を**不安定定常点**といい，特にこの場合のように，ある方向では定常点に近づき，別の方向では定常点から遠ざかるような動きをする場合，**鞍点**という．

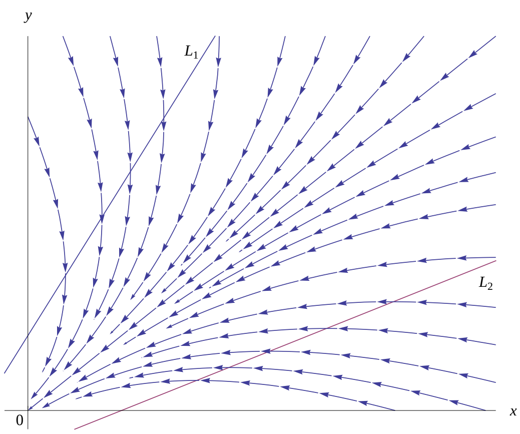
8.3.3　分析のまとめ

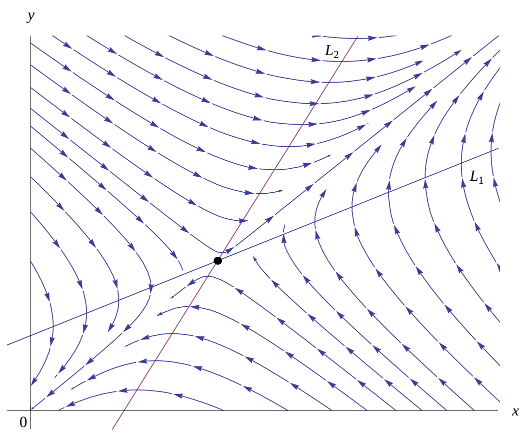
mn は両国の制約係数を掛けたものなので，二国間関係における「制約の度合い」を表していると見なすことができる．一方，ab は両国の反応係数を掛けたものであり，二国間関係における「反応の度合い」を表している．この mn と ab の大小関係が解軌道のパターンを決定しており，さらにそれに加えて，g, h の正負，つまり「敵対」か「友好」かによって，定常点が第 1 象限に入るか，第 3 象限に入るかが決まる．結局，系の挙動としては表 8.1 の 4 パターンに分けることができる．

表 8.1: 軍拡競争の 4 パターン

<table>
<tr><td></td><td>制約 > 反応
$mn > ab$</td><td>制約 < 反応
$mn < ab$</td></tr>
<tr><td>敵対
$g > 0$
$h > 0$</td><td>[Type I]


力の均衡</td><td>[Type III]


全面軍拡</td></tr>
<tr><td>友好
$g < 0$
$h < 0$</td><td>[Type II]


全面軍縮</td><td>[Type IV]


全面軍縮か全面軍拡</td></tr>
</table>

タイプごとに内実を確認しよう．

Type II と Type III は単純で直感的にも了解しやすいだろう．Type II の場合，相手国への反応よりも軍拡を抑えるという制約要因の方が大きく，かつ双方共に潜在的には相手国に友好感情を

抱いているので，どのような初期状態であっても，どんどん軍縮の方に向かっていく．今回は軍備量の挙動の話をしているので，状態 (x, y) は第 1 象限内だけを動くが，数学的にはどのような初期状態をとっても第 3 象限内にある定常点へと向かっていく．このとき実際の軍縮過程としては，自国の現在の軍備量によって相手が軍備量を減らし，それを見て自国の軍備量を減らす，という一連のループ過程が存在していると見なすことができる．このような過程をネガティブ・フィードバック過程といったりする．

一方，Type III の場合，軍拡を抑えるという制約要因よりも相手国への反応要因の方が大きく，かつ双方共に潜在的には相手国に敵対感情を抱いており，どのような初期状態であっても，どんどん軍拡の方に向かっていく．原理的にはどこまでも双方の軍備量が多くなるが，現実的にはある一定規模の軍備に到達すると戦争が起こると考えてよいだろう．このときの軍拡過程としては，自国の現在の軍備量によって相手が軍備量を増やし，それを見て自国の軍備量をさらに増やす，という一連のポジティブ・フィードバック過程が存在していると見なすことができる．ここで，取り上げている二国間軍備問題だけではなく，ネガティブ・フィードバック，ポジティブ・フィードバック過程はともに，人間関係システムにおいてしばしば観察される．

Type I, Type IV は第 1 象限内に定常点があるタイプである．Type I は潜在的な敵対感情はあるものの，反応より制約が勝っており，そのためある程度の軍備は備えるものの，ある一定規模に均衡する．この均衡点は，両国のもつ係数の値，つまり国内事情（防衛反応，予算制約，敵対心）に依存して決まる．このタイプの場合，初期状態がどのようなものであっても，一定期間たつと結局は定常状態に戻ってくる．

一方，Type IV は潜在的には友好感情を抱いているものの，制約よりも反応が大きいために，初期状態の双方の軍備量が少なければ全面軍縮へと至るものの，反対に軍備量が多ければ全面軍拡へと至ってしまう．定常点はあるものの，大変危うい均衡であって，ひとたび何らかの攪乱要因—軍備を拡張するという一方の脅しとか，軍部の暴走とか—があって，一方がわずかでも軍備を拡張すると，とどめなき軍拡へと事態は悪化してしまう．反対に，どちらかがわずかでも軍縮をすると，たちまち全面軍縮を達成することができる．

現在，アメリカのオバマ大統領が「核なき世界」を構想し，ロシアとの核軍縮交渉に乗り出しているが，もし米露二国間関係が Type IV に近いのであれば，核軍縮への小さな歩みが結果的に大きな成果をもたらすかもしれない．しかしながら，もし米露二国間関係が Type I に近いのであれば，その努力もむなしく元の木阿弥に帰するかもしれないが ⋯.

参考文献

[1] デヴィッド・バージェス/モラグ・ボリー, 1990『微分方程式で数学モデルを作ろう』日本評論社.

[2] 高坂健次，1978,「社会過程分析のモデル」碓井　・杉本一郎 (編)『現代社会と社会学的分析』アカデミア出版会: 89–112.

[3] Richardson, Lewis F. 1960. *Arms and Insecurity: A Mathematical Study of the Causes and Origins of War*. Edited by Nicolas Rashevsky and Ernesto Trucco. Pittsburgh: Boxwood Press.

[4] 佐藤總夫，1984, 1987,『自然の数理と社会の数理—微分方程式で解析する I・II』日本評論社.