統計学の復習 2

crimsonbach

2004 年 9 月 8 日

正規分布（normal distribution）（あるいはガウス分布）は代表的な連続型の確率分布である。たとえば他の連続型の確率分布には指数分布（exponential distribution）、ガンマ分布（Gamma distribution）、ベータ分布（Beta distribution）、コーシー分布（Cauchy distribution）などがある。正規分布の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad -\infty < x < \infty.$$

これを平均 μ 、分散 σ^2 に従う正規分布といい、

$$N\Big(\mu, \sigma^2\Big).$$

と表記する。密度関数の定数

$$\sqrt{2\pi}\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

とするための規格化定数である。

確率変数が正規分布に従っているとき、その期待値および分散はそれぞれ

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}) \exp\left\{-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \mu$$
$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}) \exp\left\{-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \sigma^2$$

また密度関数の 1 階微分および 2 階微分についてそれぞれ

$$f'(\mu) = 0$$
$$f''(\mu \pm \sigma) = 0$$

が成り立つため、 μ は頂点であり、 $\mu \pm \sigma$ は変曲点である。特徴としてはまず、確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとき、その線型変換 $Y = aX + b$ は $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ に従う。ついで、標準化変数 $Z = (X - b)/\sigma$ は正規分布 $N(0, 1)$ に従う。これは標準正規分布（standard normal distribution）という。

また、確率変数 X を標準化すると

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}.$$

となり、期待値および分散は

$$E(Z) = E\Big(\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{V(X)}}(E(X) - E(X)) = 0$$

$$V(Z) = V\Big(\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\Big) = \frac{1}{V(X)}V(X - E(X)) = \frac{V(X)}{V(X)} = 1.$$