行列の復習 2

crimsonbach

2004 年 9 月 7 日

ヤコビアン、ラプラス展開、クラーメルの公式を復習する。まず、ヤコビアンあるいはヤコビの行列式は

$$|J| \equiv \left|\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,y_n)}\right| \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

n 個の関数が関数従属の場合、ヤコビアン $|J| = 0$ になる。前回の『行列の復習 1』にあった線型方程式体系において、左辺を n 個の変数の個別関数として、各関数の偏導関を $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = a_{ij}$ とすれば

$$|J| = |A|.$$

ヤコビアンの要素と係数行列の要素が対応する。

ラプラス展開の前に 2 次の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12} \quad (= \text{スカラー}).$$

3 次の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

上の右辺の第 1 項において、 $|A|$ の部分行列 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ は要素 a_{11} の小行列式であり、この場合

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

そして小行列 $|M_{ij}|$ に対して指定された符号がついたものを余因子 $|C_{ij}|$ という。小行列式 $|M_{ij}|$ にて $i + j =$ 偶数 なら同じ符号がつき、奇数ならば逆の符号がつく。

$$|C_{ij}| \equiv (-1)^{i+j}|M_{ij}|. \tag{2}$$

3 次の例では

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| \\ &= \sum_{j=1}^{3} a_{1j}|C_{1j}|. \end{aligned}$$

n 次の行列式のラプラス展開はその行列の値を求める問題を n 個の $(n-1)$ 次の余因子を求める問題にかえる。第 1 行による展開は

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}|C_{1j}|.$$

第 1 列による展開は

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}|C_{i1}|.$$

同じく n 次の線型方程式体系で

$$Ax = d$$

$$\overline{x} = A^{-1}d = \frac{1}{|A|}(adj\ A)d.$$

クラーメルの公式より

$$\overline{x}_i = \frac{1}{|A|}|A_i| = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & d_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & d_2 & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & d_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

たとえば、

$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 10x_1 - 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

において

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -61, \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -61,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 10 & 8 & 1 \\ 6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -183, \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 10 & -2 & 8 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -244.$$

唯一の解はそれぞれ

$$\overline{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1, \quad \overline{x}_2 = 3, \quad \overline{x}_3 = 4.$$