経済数学の基礎 2

crimsonbach

2006 年 8 月 8 日

1　ヤコビアンの定義

R^n から R^n への C^1 級の写像

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\bigl(f_1(X_1,\cdots,x_n),\cdots\cdots\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n)\bigr).$$

に対して,

$$J(f)=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

を f のヤコビアンまたは関数行列式という.

2　座標変換のヤコビアン

・平面： $x=r\cos\theta$,　$y=\sin\theta$ のとき, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$

・空間： $x=r\sin\theta cos\varphi$,　$y=r\sin\theta\sin\varphi$,　$z=r\cos\varphi$ のとき,

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta.$$

3　合成写像のヤコビアン

$f_1,\cdots,f_n$ をそれぞれ $x_1,\cdots,x_n$ の C^1 級の関数,　$x_1,\cdots,x_n$ をそれぞれ $t_1,\cdots,t_n$ の C^1 級の関数とするとき,

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}.$$

4　逆写像定理

R^n から R^n への C^1 級の写像 $y_i=f_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,n)$ に対して, $\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\neq 0$ となる点の近傍で C^1 級の逆写像が存在する.

5　陰関数定理

C^1 級の関数 $f_i(X_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)=0(i=1,\cdots,n)$ に対して, $\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\neq 0$ となる点の近傍で, ある C^1 級の関数 $g_1,\cdots,g_n$ が存在して, $y_i=g_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,n)$ と表すことができる.