指数関数と対数関数 1

crimsonbach

2004 年 8 月 24 日

独立変数が指数として現われる関数を指数関数という．たとえば， 3^x とか 3^t とか．簡単なかたち

$$y = f(t) = b^t, \qquad (b > 1). \tag{1}$$

で，指数関数の特徴を 3 つ挙げる．第 1 に連続的で微分可能であること，第 2 に単調増加 ($\frac{dy}{dt} > 0, \frac{d^2y}{dt^2} > 0$) であること，最後に関数の値域が開区間 $(0, \infty)$ に限定され，いかなる正の数も $b > 1$ の底の唯一のベキ数として表すことができることの 3 つである．第 2 の特徴について付け加えると，逆関数つまり対数関数をもち，与えられた y に対して唯一の値 t がある．これらの特徴は指数関数の一般的なかたち

$$y = ab^{ct}, \qquad (a, c \text{ は圧縮・拡張要因}). \tag{2}$$

にも適用できる．

次に底が e の指数関数を自然指数関数という．たとえば,

$$y = e^t, \qquad y = e^{3t}, \qquad y = Ae^{rt}.$$

あるいは同じ意味だが

$$y = \mathtt{exp}(t), \quad y = \mathtt{exp}(3t), \quad y = A\mathtt{exp}(rt).$$

である．自然指数関数の優れた特徴はたとえば e^t を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}e^t = e^t. \tag{3}$$

となって，使い勝手がいいところだ．これは $y = Ae^{rt}$ にも適用できる．rt を w とおき， A および r を定数とすると,

$$y = Ae^w, \quad (rt = w)$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dt} = Ae^w(r) = rAe^{rt}.$$

と確認でき，一般的な指数関数にもその便利な特徴

$$\frac{d}{dt}Ae^{rt} = rAe^{rt}. \tag{4}$$

があてはまる．この自然対数 e を経済学の中でどのように利用するかというと，たとえば $f(m) = (1 + \frac{1}{m})^m$ を考える．この式に数を代入していくと，

$$f(1) = (1 + \frac{1}{1})^1 = 2$$
$$f(2) = (1 + \frac{1}{2})^2 = 2.25$$
$$f(3) = (1 + \frac{1}{3})^3 = 2.37037$$
$$f(4) = (1 + \frac{1}{4})^4 = 2.44141$$

となることから， m を ∞ に近づけていくと $f(m)$ は $2.71828\cdots \equiv e$ に収束する．このことは e^x のマクローリン級数を求めると証明できるが，ここでは割愛し話を進めよう．経済学ではこういった性質をまず複利計算で利用している．たとえば，現在の 1 ドルを預金利子率 100 %で 1 年間運用したとしよう．1 年後の資産価格を $V(1)$ とすると

$$V(1) = 1(1 + \frac{1}{1})^1 = 2.$$

になる．つまり 2 ドルだ．

$$V(1) = \text{初期の元金}\ (1 + \text{利子率}).$$

こうすると少し分かりやすいだろう．続いて半年後ごとに 50 %の利子がつく場合，1 年後の資産価格は

$$V(2) = (1 + 50\ \%)(1 + 50\ \%) = (1 + \frac{1}{2})^2.$$

となり，同様に年に 3 回ごとに繰り入れる $m = 3$ の場合を計算すると

$$V(3) = (1 + \frac{1}{3})^3.$$

になるとわかる．つまり一般的に

$$V(m) = (1 + \frac{1}{m})^m.$$

が成立し， m が ∞ に近づくと

$$\lim_{m\to\infty} V(m) = \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{1}{m})^m = e.$$

となって，1 年後の資産価格は e になる．

これまでの話を一般的に適用できるようにしよう．まず利子率の繰り入れが 1 年以上の場合に，元金を 1 ドル以外に，そして名目利子率を 100 %以外に拡張する．利子率 100 %で元金 1 ドルで利子の繰り入れ年を時間的に増やしていくと 1 年後には e ドル，2 年後には e^2 ドル，3 年後には e^3 となる．利子率 100 %で元金 A ドルにすると 1 年後には Ae ドル，2 年後には Ae^2 ドル，3 年後には Ae^3 ドルと変わる．そして，利子率も r にすると 1 年後には Ae^r ドル，2 年後には Ae^{2r} ドルと以下同様に続いていく．ここまでをまとめると

$$V(m) = A(1 + \frac{r}{m})^{mt}. \tag{5}$$

と一般化したかたちが求められる．因みに， $\frac{r}{m}$ は年に m 回の繰り入れがあり，そのたび利子率 r の $\frac{1}{m}$ だけ繰り入れられるという意味である．これは $w = \frac{m}{r}$ とすると，

$$V(m) = A\ \left[(1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{r}}\right]^{rt}$$

$$V(m) = A\left[(1+\frac{1}{w})^{w}\right]^{rt}.$$

となり， m を ∞ に近づけていくとき w も ∞ に近づき $(1+\frac{1}{w})^{w}$ は e に収束する．よって，

$$V(m) = \lim_{m\to\infty} V(m) = Ae^{rt}. \tag{6}$$

だと分かる．

次回は成長率の話に移る．