Kuhn - Tucker 条件

crimsonbach

2005 年 1 月 16 日

次の制約のある最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\quad s.t. \quad g_j(x) \le 0, \quad j = 1, \cdots, m. \\ &\qquad\qquad h_k(x) = 0, \quad k = 1, \cdots, l. \end{aligned}$$

この最適化問題について、

$$\begin{aligned} L(x,\ \lambda,\ \mu) &= f(x) \\ &= f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) + \sum_{k=1}^{l} \mu_k h_k(x) \end{aligned}$$

を導入する。この関数をラグランジュ関数（Lagrange function）と呼ぶ。次の方程式

$$\begin{cases} \nabla_x L(x,\ \lambda,\ \mu) = \nabla f(x) + \nabla \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) + \nabla \sum_{k=1}^{l} \mu_k h_k(x) = 0 \\ \lambda_j \ge 0, \quad \lambda_j g_j(x) = 0, \quad g_j(x) \le 0, \quad j = 1, \cdots, m \\ h_k(x) = 0, \quad k = 1, \cdots, l. \end{cases}$$

が Kuhn - Tucker 条件である。特に、

$$(\lambda,\ \mu) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots, \mu_l)$$

は Kuhn - Tucker 乗数ベクトル（Kuhn - Tucker multiple vector）と呼ばれる。さらに、

$$\lambda_j g_j(x) = 0, \quad j = 1, \cdots, m$$

を相補条件（Complementarily condition）という。