微分方程式 1

crimsonbach

2004 年 9 月 13 日

1 階線型微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t). \tag{1}$$

の話に入ろう。微分方程式が同次である場合、 u および w が定数でかつ $w = 0$ なら、

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a.$$

この微分方程式の一般解および確定解はそれぞれ

$$y(t) = Ae^{-at}$$
$$y(t) = y(0)e^{-at}$$

A は任意の定数だから一般解であり、 $y(0)$ は $t = 0$ のときの確定した値であるから確定解である。微分方程式が非同次である場合は

$$\frac{dy}{dt} + ay = b. \tag{2}$$

非同次の微分方程式の解を導くにあたって、(1)式を誘導方程式、そして非同次の微分方程式そのものを完全方程式と呼ぶ。そして、その解は補助関数 y_c と特殊積分 y_p から構成され、それらはそれぞれ誘導方程式の一般解および完全方程式の任意の特殊解である。誘導方程式の一般解は上にも書いたが、

$$y_c = Ae^{-at}$$

特殊解の最も簡単なかたちは y が定数のときであり($y = k$)、 $dy/dt = 0$ であり、(2)式から

$$ay = b, \qquad y = \frac{b}{a} \qquad a \neq 0.$$

よって特殊解は定数解

$$y_p = \frac{b}{a}. \tag{3}$$

よって完全方程式の一般解は

$$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + \frac{b}{a} \qquad a \neq 0. \tag{4}$$

確定解は $y(0) = A + b/a$ から

$$y(t) = \left[y(0) - \tfrac{b}{a}\right] e^{-at} + \frac{b}{a} \qquad a \neq 0. \tag{5}$$

たとえば、初期条件が $y(0)=10$ の 1 階微分方程式 $dy/dt+2y=6$ を解くと、

$$y(t)=\left[10-3\right]e^{-2t}+3=te^{-2t}+3.$$

これまでは $a\neq 0$ の場合の話をしてきたが、 $a=0$ の場合は最も簡単な（2）式より

$$\frac{dy}{dt}=b \qquad a=0$$

このときの解は

$$y(t)=bt+c, \qquad c:\text{任意の定数}. \tag{6}$$

であり、補助関数および特殊積分は

$$y_c=Ae^{-at}=Ae^0=A, \qquad A:\text{任意の定数}\ y_p=bt. \tag{7}$$

特殊積分は定数解ではないため、最も簡単なかたち $y=kt,\ dy/dt=k$ から求めている。したがって、完全方程式の一般解および確定解はそれぞれ

$$y(t)=y_c+y_p=A+bt, \tag{8}$$

$$y(t)=y(0)+bt. \tag{9}$$

解の検算は（5）式の導関数

$$\frac{dy}{dt}=-a\left[y(0)-\tfrac{b}{a}\right]e^{-at}.$$

を使って

$$-a\Big(y(t)-\frac{b}{a}\Big)e^{-at}+a\left\{\left[y(0)-\tfrac{b}{a}\right]e^{-at}+\tfrac{b}{a}\right\}=b. \tag{10}$$

解が初期条件を満たせば解は正しい。$t=0$ とおくと

$$y(0)=\left[y(0)-\tfrac{b}{a}\right]+\frac{b}{a}=y(0).$$